

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RENATO CESAR BRODZINSKI

UM ESTUDO DE MÉTODOS
ESPECTRAIS DE DERIVAÇÃO

CURITIBA

2013

RENATO CESAR BRODZINSKI

UM ESTUDO DE MÉTODOS
ESPECTRAIS DE DERIVAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática
Aplicada, Setor de Ciências Exatas,
Universidade Federal do Paraná, como
requisito parcial à obtenção do título
de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Ailín Ruiz de
Zárate Fábregas

CURITIBA

2013

TERMO DE APROVAÇÃO

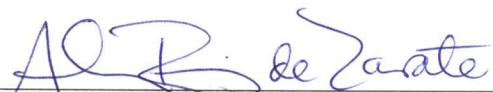
UM ESTUDO DE MÉTODOS ESPECTRAIS DE DERIVAÇÃO

por


RENATO CESAR BRODZINSKI

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada,
pela Comissão Examinadora composta por:


Orientador:



Profa. Dra. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas
Dep. de Matemática– UFPR



Prof. Dr. Daniel Gergório Alfaro Vigo
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Profa. Dra. Ana Gabriela Martinez
Dep. de Matemática – UFPR

Curitiba, 13 de setembro de 2013



Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação do candidato **RENATO CESAR BRODZINSKI** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 13 de setembro de 2013.

Profa. Dra. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas
Presidente

Prof. Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo
Titular

Profa. Dra. Ana Gabriela Martinez
Titular



Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

ATA DA 54ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos treze dias do mês de setembro de 2013, no Anfiteatro A, Prédio das PCs, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pela Professora Ailin Ruiz de Zarate Fabregas, a Banca Examinadora para a quinquagésima quarta Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Profa. Dra. Ana Gabriela Martinez, da Universidade Federal do Paraná, e a Profa. Dra. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas, orientadora da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às quinze e trinta horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **RENATO CESAR BRODZINSKI** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "UM ESTUDO DE MÉTODOS ESPECTRAIS DE DERIVAÇÃO". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

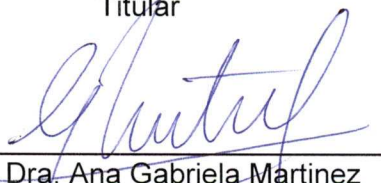
Curitiba, 13 de setembro de 2013.



Profa. Dra. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas
Presidente



Prof. Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo
Titular



Profa. Dra. Ana Gabriela Martinez
Titular

Agradecimentos

À professora Ailín Ruiz de Zárate Fábregas pela orientação, ensinamentos, incentivos e principalmente por ter me acolhido nos momentos que eu mais precisava.

À minha companheira de todos os momentos Janaina Schoeffel, que agora agrega o sobrenome Brodzinski, pelo apoio incansável e inestimável, pela compreensão incondicional de minhas imperfeições e limitações e pela valiosa ajuda dada durante a realização deste trabalho.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho são estudados quatro métodos espectrais de derivação, que são baseados nas Transformadas de Fourier Semidiscreta e Discreta. Estes métodos foram testados e comparados em MATLAB usando funções gaussianas e funções sinc. Estas funções não são periódicas em \mathbb{R} , então foram restritas ao intervalo $[-\pi, \pi]$. Apesar dos métodos discretos serem estabelecidos para funções periódicas, constatou-se que, quando o fenômeno de Gibbs é de baixa intensidade, eles tiveram melhor desempenho do que os métodos semidiscretos truncados. Quando o fenômeno de Gibbs causa grandes oscilações, os métodos semidiscretos foram um pouco mais precisos.

Palavras-chave: Método espectral. Derivação numérica. Transformadas de Fourier.

Abstract

In this work four differentiation spectral methods are studied, which are based on Semidiscrete and Discrete Fourier Transforms. These methods were tested and compared in MATLAB using Gaussian functions and sinc functions. These functions are not periodic in \mathbb{R} , so they were restricted to the interval $[-\pi, \pi]$. Although the discrete methods are designed for periodic functions, it was found that, when the Gibbs phenomenon is of low intensity, they had better performance than the truncated semidiscrete methods. When the Gibbs phenomenon leads to large oscillations, the semidiscrete methods were a little bit more accurate.

Key words: Spectral method. Numerical differentiation. Fourier Transforms.

Lista de Figuras

3.1	Método espectral aplicado à função gaussiana	31
3.2	Método espectral aplicado à função delta	34
3.3	Método espectral aplicado à função delta periódica	43
4.1	Função theta de Jacobi	56
4.2	Aproximação da função theta de Jacobi	58
4.3	Convergência da theta de Jacobi para a gaussiana	58
4.4	Erros dos métodos ao aproximar a função gaussiana	60
4.5	Erros dos métodos ao aproximar a função gaussiana	61
4.6	Erros dos métodos ao aproximar a derivada da gaussiana	62
4.7	Erros dos métodos ao aproximar a derivada da gaussiana	63
4.8	Diferença entre as funções sinc e sinc periódicas	65
4.9	Diferenças entre as sinc e sinc periódicas quando $h \rightarrow 0$	66
4.10	Aproximação da função sinc via FFT e interpolador	67
4.11	Derivada da sinc via FFT e fenômeno de Gibbs	69
4.12	Diferença entre S'_h e o resultado do método via FFT	70
4.13	Oscilação de $S'_h(\pi)$	72
4.14	Aproximação da derivada da sinc ignorando os extremos	73
4.15	Aproximação da derivada da gaussiana ignorando os extremos	73
4.16	Diferença entre as derivadas da sinc e sinc periódicas	75
4.17	Derivada da sinc periódica via FFT	77
4.18	Derivação espectral via fft com zero padding	78
4.19	Aproximação da derivada da gaussiana com mais dados	79
4.20	Aproximação da derivada da sinc com mais dados	79
4.21	Aproximação da derivada da sinc com ainda mais dados	80

Sumário

1	Introdução	11
2	Revisão de Análise de Fourier	13
2.1	Transformada de Fourier	13
2.2	Transformada de Fourier Semidiscreta	21
2.3	Transformada de Fourier Discreta	26
3	Métodos Espectrais de Derivação	29
3.1	Primeiro Método Espectral — Funções não Periódicas	29
3.1.1	Interpolador da delta de Kronecker - função Sinc	32
3.1.2	Interpolador em ℓ_h^2	36
3.1.3	Segundo método espectral - Forma alternativa	38
3.1.4	Precisão do método espectral	40
3.2	Terceiro Método Espectral — Funções Periódicas	41
3.2.1	Interpolador da delta de Kronecker - Sinc periódica	42
3.2.2	Interpolador em ℓ_N^2	46
3.2.3	Quarto método espectral - Forma alternativa	47
4	Testes em MATLAB	55
4.1	Estudo da Gaussiana e Testes de Precisão	55
4.2	Estudo da Sinc e Sinc Periódica	64
4.3	Outras tentativas de atenuar o fenômeno de Gibbs	77
5	Conclusão	81
A	Códigos: Figuras do Capítulo 3	83
B	Programas do Capítulo 4	91
	Referências	101

Capítulo 1

Introdução

O objetivo central dos métodos espectrais de derivação é aproximar a derivada de uma função de \mathbb{R} em \mathbb{C} utilizando apenas valores isolados ou discretos, com o objetivo de implementação computacional. Os métodos espectrais são uma das três grandes tecnologias para resolução numérica de equações diferenciais ordinárias e parciais (EDOs e EDPs), ao lado dos métodos de diferenças finitas e dos métodos de elementos finitos. Consequentemente, estes métodos possuem um amplo escopo de aplicações: mecânica dos fluidos, mecânica quântica, fenômenos vibratórios e ondulatórios, análise complexa, dentre outras áreas.

Quando os dados que definem o problema são suaves em um domínio simples, para resolver uma EDO ou uma EDP com precisão alta, geralmente os métodos espectrais são a melhor ferramenta. Eles podem atingir, em alguns casos, dez dígitos de precisão contra dois ou três dígitos pelos métodos de diferenças finitas ou elementos finitos. Além disso, para precisões menores, eles exigem menos custo computacional do que os outros métodos.

Os métodos em questão são chamados de espectrais porque baseiam-se no espectro da função, ou seja, nos valores da sua Transformada de Fourier. Por conseguinte, o presente trabalho inicia-se com uma revisão de análise de Fourier no capítulo 2, onde são enunciados os resultados que constituem a base teórica dos métodos espectrais de derivação.

No capítulo 3 são apresentados detalhadamente quatro métodos espectrais de derivação. Os dois primeiros fundamentam-se na Transformada de Fourier Semidiscreta e utilizam uma quantidade infinita de dados, o que impede sua implementação completa. Mesmo assim, eles foram implementados parcialmente no capítulo 4, através do truncamento dos intervalos e dos somatórios, a fim de comparar seus desempenhos com o terceiro e o quarto métodos. Estes dois últimos são definidos com base na Transformada de

Fourier Discreta, por isso utilizam uma quantidade finita de dados.

Por fim, o capítulo 4 é dedicado a testar estes métodos espectrais de derivação no *software* MATLAB, versão 7. Os exemplos escolhidos para os experimentos são as funções gaussianas (exemplo clássico em Análise de Fourier), as funções sinc e as sinc periódicas, que são os três tipos de funções utilizadas no capítulo 3 para ilustrar os métodos espectrais.

É bom destacar desde já que, no desenvolvimento do primeiro e do terceiro métodos apresentados, são definidos interpoladores da função original, porém o objetivo do presente trabalho não é fazer um estudo dos métodos de interpolação espectral, e sim aproximar o valor da derivada da função original nos pontos de uma malha discreta. É com base nos valores das funções nesta malha que são feitos os testes do capítulo 4.

Todos os códigos de MATLAB utilizados para gerar os dados e as figuras dos capítulos 3 e 4 estão listados nos apêndices A e B, respectivamente.

Capítulo 2

Revisão de Análise de Fourier

Este capítulo constitui uma breve revisão de Análise de Fourier, onde são fixadas as notações e são enunciados sem demonstração os principais resultados da teoria, que serão utilizados nos capítulos seguintes.

2.1 Transformada de Fourier

Nesta seção o objetivo é estudar a Transformada de Fourier para funções de \mathbb{R} em \mathbb{C} , começando pelas funções de módulo integrável segundo Lebesgue, para as quais a Transformada é definida pela fórmula integral. Em seguida são estudados outros espaços, onde o operador da Transformada de Fourier pode ser estendido.

Definição 2.1.1. O conjunto das funções *absolutamente integráveis* é definido por

$$L^1(\mathbb{R}) = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_1 < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx.$$

Definição 2.1.2. Para $u \in L^1(\mathbb{R})$ a *Transformada de Fourier* $\hat{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.1)$$

A fórmula (2.1) está bem definida para $u \in L^1(\mathbb{R})$ porque $|e^{-ikx}| = 1$.

A maioria das propriedades da Transformada de Fourier serão enunciadas mais adiante em um espaço mais adequado, por enquanto será mencionado só o essencial. Por exemplo, a linearidade: para todos $u, v \in L^1(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{C}$, vale

$$\widehat{u + cv} = \hat{u} + c\hat{v}.$$

Teorema 2.1.3. *Se $u \in L^1(\mathbb{R})$, então*

1. $|\hat{u}(k)| \leq \|u\|_1, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$
2. \hat{u} é limitada e uniformemente contínua.
3. Vale o lema de Riemann-Lebesgue ([16], p. 171 e 274):

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{u}(k) = 0.$$

Definição 2.1.4. O conjunto das funções de *quadrado integrável* é definido por

$$L^2(\mathbb{R}) = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_2 < \infty\},$$

onde a *norma* $\|\cdot\|_2$ é definida por

$$\|u\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

O *produto interno* correspondente, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, é definido, para $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, por

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Observação 2.1.5. Uma tentativa natural de relacionar os espaços $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$ seria a inclusão, mas ela não é válida em nenhum sentido, ou seja,

1. $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R}).$
2. $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R}).$

A seguir os respectivos exemplos:

1. A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pertence a $L^1(\mathbb{R})$ porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 < +\infty,$$

mas não pertence a $L^2(\mathbb{R})$ porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln \epsilon) = +\infty.$$

2. A função sinc, que aparecerá no próximo capítulo,

$$S_h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x\pi/h)}{x\pi/h}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

onde $h > 0$, pertence ao espaço $L^2(\mathbb{R})$ porque sua Transformada de Fourier (o cálculo será feito no capítulo 3),

$$\widehat{S_h}(k) = \begin{cases} h, & \text{se } k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pertence a $L^2(\mathbb{R})$ (vide observação 2.1.11 e item 1. do teorema 2.1.13). Mas ela não pertence a $L^1(\mathbb{R})$ porque $\widehat{S_h}$ não é contínua (vide item 2 do teorema 2.1.3).

◇

Observação 2.1.6. O espaço $L^2(\mathbb{R})$ é completo na norma $\|\cdot\|_2$ (vide [4], p. 240).

◇

O interesse aqui é trabalhar com funções em $L^2(\mathbb{R})$, mas a fórmula (2.1) da Transformada de Fourier não se aplica para qualquer função deste conjunto. Uma alternativa seria considerar o conjunto $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, que é denso em $L^2(\mathbb{R})$ com relação à norma $\|\cdot\|_2$, porém as contas tornam-se muito complicadas. Por isso, mesmo que a princípio pareça mais complicado, é preferível definir o espaço de Schwartz como segue.

Definição 2.1.7. O *espaço de Schwartz* é o conjunto das funções $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suaves e rapidamente decrescentes, isto é, é o conjunto

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}); \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m u^{(n)}(x)| < \infty, \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}.$$

Observação 2.1.8. O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é um subconjunto de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e é denso em $L^2(\mathbb{R})$ com relação à norma $\|\cdot\|_2$. \diamond

Exemplo 2.1.9. [Função Gaussiana, figura 3.1]

Seja $u(x) = e^{-x^2}$. Então $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, suas derivadas são a própria u vezes um polinômio e $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)u(x) = 0$, para qualquer polinômio p . Consequentemente, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Cálculo da Transformada de Fourier de u :

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik/2)^2} dx.$$

Para calcular esta última integral, será usado o teorema de Cauchy e depois aplicado o limite com intervalo de integração tendendo a infinito. Para tanto, seja $U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a extensão de u , isto é, $U(z) = e^{-z^2}$, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Fixados $a > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ os caminhos — no sentido horário — cujos traços são

$$\begin{aligned} tr\Gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C}; Re(z) \in [-a, a], Im(z) = 0\}, \\ tr\Gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C}; Re(z) = -a, Im(z) \in [0, k/2]\}, \\ tr\Gamma_3 &= \{z \in \mathbb{C}; Re(z) \in [-a, a], Im(z) = k/2\}, \\ tr\Gamma_4 &= \{z \in \mathbb{C}; Re(z) = a, Im(z) \in [0, k/2]\}. \end{aligned}$$

Como U é analítica em \mathbb{C} , tem-se, pelo teorema de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} U(z)dz + \int_{\Gamma_2} U(z)dz + \int_{\Gamma_3} U(z)dz + \int_{\Gamma_4} U(z)dz &= 0, \\ \int_a^{-a} e^{-x^2} dx + \int_0^{k/2} e^{-(-a+iy)^2} dy + \int_{-a}^a e^{-(x+ik/2)^2} dx + \int_{k/2}^0 e^{-(a+iy)^2} dy &= 0. \end{aligned}$$

A limitação da integral em Γ_2 é garantida pelas desigualdades

$$\left| \int_0^{k/2} e^{-(-a+iy)^2} dy \right| \leq \int_0^{k/2} |e^{-(-a+iy)^2}| dy = \int_0^{k/2} e^{-a^2+y^2} dy \leq \frac{k}{2} e^{-a^2+k^2/4},$$

e mostra que seu limite é zero, quando $a \rightarrow \infty$. O mesmo argumento vale para a integral em Γ_4 . Portanto, aplicando o limite com $a \rightarrow \infty$, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik/2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ou seja,

$$\hat{u}(k) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

△

Antes de enunciar as propriedades da Transformada de Fourier no espaço de Schwartz, é preciso definir a Transformada de Fourier Inversa.

Definição 2.1.10. Para $v \in L^1(\mathbb{R})$, define-se a *Transformada de Fourier Inversa* $\check{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\check{v}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikx} dk. \quad (2.2)$$

A fórmula (2.2) está bem definida para $u \in L^1(\mathbb{R})$ porque $|e^{-ikx}| = 1$.

Observação 2.1.11. Vê-se, diretamente da definição, que $\check{v}(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{v}(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

◇

Teorema 2.1.12. Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

1. A derivada n -ésima $u^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e

$$\widehat{u^{(n)}} = i^n k^n \hat{u}(k), \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

2. $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. Vale a fórmula de inversão

$$u(x) = \check{\hat{u}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dk, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Vale a identidade de Parseval:

$$\|\hat{u}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|u\|_2.$$

5. O operador linear $\hat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é injetivo, sobrejetivo, contínuo e com inversa contínua.

(Vide [16], páginas, 174, 175, 176, 178 e 179, respectivamente.)

A Transformada de Fourier restrita ao espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pode ser estendida de forma única ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, pelo teorema da extensão linear de transformação contínua (página 100 de [8]), cujas hipóteses são garantidas pelo teorema

2.1.12 e pelas observações 2.1.6 e 2.1.8. Neste caso não será feita distinção da notação $\widehat{\cdot}$. Com este processo, apesar da fórmula (2.1) não se aplicar para qualquer função de $L^2(\mathbb{R})$, torna-se legítimo definir a Transformada de Fourier neste espaço. É assim que a Transformada de Fourier será estudada daqui para frente.

Teorema 2.1.13. [Propriedades da Transformada de Fourier] *Se $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{C}$, então*

1. $\widehat{u}, \widehat{v} \in L^2(\mathbb{R})$.
2. *Linearidade:* $\widehat{u + cv} = \widehat{u} + c\widehat{v}$.
3. *Translação:* Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $u(x) = v(x + x_0)$, então $\widehat{u}(k) = e^{ikx_0}\widehat{v}(k)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
4. *Modulação:* Se $k_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x) = e^{ik_0x}$, então $\widehat{(f \cdot u)}(k) = \widehat{u}(k - k_0)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
5. *Dilatação:* Se $c \in \mathbb{R}$ não nulo e $v(x) = u(cx)$, então $\widehat{v}(k) = \frac{\widehat{u}(k/c)}{|c|}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
6. *Conjugação:* $\widehat{\widehat{u}}(k) = \overline{\widehat{u}(-k)}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
7. *Identidade de Parseval:* $\|\widehat{u}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|u\|_2$ (Vide [22], p. 156).

[Propriedades de simetria]

8. u é par (ímpar) $\iff \widehat{u}$ é par (ímpar).
9. $\text{Im } u \subset \mathbb{R} \iff \widehat{u}(k) = \overline{\widehat{u}(-k)}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
10. $\text{Im } u \subset i\mathbb{R} \iff \widehat{u}(k) = -\overline{\widehat{u}(-k)}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
11. $\text{Im } u \subset \mathbb{R}$ e u é par $\iff \text{Im } \widehat{u} \subset \mathbb{R}$ e \widehat{u} é par.
12. $\text{Im } u \subset \mathbb{R}$ e u é ímpar $\iff \text{Im } \widehat{u} \subset i\mathbb{R}$ e \widehat{u} é ímpar.
13. $\text{Im } u \subset i\mathbb{R}$ e u é par $\iff \text{Im } \widehat{u} \subset i\mathbb{R}$ e \widehat{u} é par.
14. $\text{Im } u \subset i\mathbb{R}$ e u é ímpar $\iff \text{Im } \widehat{u} \subset \mathbb{R}$ e \widehat{u} é ímpar.

Definição 2.1.14. A *convolução* de duas funções $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida, quando a integral existir, por

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)v(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1.15. [Propriedades da convolução]

1. Se $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, então $u * v \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$.
2. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ e $v \in L^2(\mathbb{R})$, então $u * v \in L^2(\mathbb{R})$ e $\|u * v\|_2 \leq \|u\|_1 \|v\|_2$.
3. Se $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $u * v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
4. $(\lambda u) * v = \lambda(u * v) = u * (\lambda v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
5. $(u + v) * w = u * w + v * w$.
6. $u * v = v * u$.
7. $(u * v) * w = u * (v * w)$.
8. Se $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, então $\widehat{(u * v)}(k) = \hat{u}(k)\hat{v}(k)$.

(Vide [22], teorema de Hausdorff-Young, p. 157; [16], p. 181 e 182; [17], p. 349 e 350.)

Para enunciar o próximo teorema, precisa-se das seguintes definições de *ordem de convergência* e função de variação limitada:

1. “O grande”: Diz-se que a função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz

$$u(x) = O(g(x)) \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty,$$

quando existe uma constante C tal que, para todo $|x|$ suficientemente grande, vale

$$|u(x)| < C|g(x)|.$$

2. “o pequeno”: Diz-se que a função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz

$$u(x) = o(g(x)) \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty,$$

quando

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|u(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

3. Uma função f é de variação limitada se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\sup_{\substack{g \in C^1(\mathbb{R}) \\ |g(x)| \leq 1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g'(x) dx \right) < \infty.$$

Quando f é contínua, esta definição coincide com a condição de existência do limite

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} V_a^b[f] < +\infty, \quad \text{onde } V_a^b[f] = \sup \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

com o supremo sobre todas as partições $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ (n não fixado). Um estudo sobre funções de variação limitada é feito em [1], nas páginas 374 e seguintes.

Teorema 2.1.16. *[Suavidade de uma função vs. decaimento de sua TF]*
Dada $u \in L^2(\mathbb{R})$, tem-se:

1. Se $u^{(s)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, com $0 \leq s < n$, para algum $n > 0$ inteiro, e $u^{(n)}$ é de variação limitada, então

$$\hat{u}(k) = O(|k|^{-n-1}) \quad \text{quando } |k| \rightarrow \infty.$$

2. u tem infinitas derivadas contínuas em $L^2(\mathbb{R})$ se, e somente se,

$$\hat{u}(k) = O(|k|^{-m}) \quad \text{quando } |k| \rightarrow \infty,$$

para todo $m \geq 0$ inteiro.

3. (Paley-Wiener) A função $u_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\hat{u}_a(k) = e^{a|k|}\hat{u}(k)$, com $a > 0$ constante, pertence a $L^2(\mathbb{R})$ se, e somente se, existe uma constante $c > 0$ tal que u é a restrição em \mathbb{R} de uma função U analítica na faixa $\{z \in \mathbb{C}; |Im z| < a\}$ que satisfaz

$$\|U(\cdot + iy)\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x + iy)|^2 dx \leq c, \quad \text{para todo } |y| < a$$

(vide [22], p. 188).

4. (Paley-Wiener) $\hat{u}(k)$ tem suporte compacto contido em $[-a, a]$, $a > 0$ constante, se, e somente se, u é a restrição em \mathbb{R} de uma função U

analítica em \mathbb{C} tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|U(z)| = o(e^{a|z|}) \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty.$$

(vide [18], p. 12 e 13, e [11], p.181).

2.2 Transformada de Fourier Semidiscreta

O uso de computadores digitais limita os cálculos a dados discretos e em quantidade finita. Como primeiro passo, nesta seção são estudadas funções discretizadas, porém ainda em quantidade infinita de pontos (em quantidade finita é o assunto da próxima seção); mais precisamente, as funções consideradas têm como domínio o conjunto

$$h\mathbb{Z} = \{x_j = jh \in \mathbb{R}; j \in \mathbb{Z}\},$$

ou seja, uma malha de pontos equidistantes à qual o 0 pertence. Neste caso, se v for uma função definida em $h\mathbb{Z}$, sua imagem em cada ponto será denotada da forma abreviada $v(x_j) = v_j$.

Definição 2.2.1. Neste contexto, os espaços mais convenientes a serem trabalhados no domínio físico e das frequências são, respectivamente,

$$\ell_h^2 = \{v : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \|v\|_{\ell_h^2} < \infty\},$$

$$L_h^2 = \{w : [-\pi/h, \pi/h] \rightarrow \mathbb{C}; w \text{ é mensurável e } \|w\|_{L_h^2} < \infty\},$$

onde as *normas* são definidas por

$$\|v\|_{\ell_h^2} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j|^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|w\|_{L_h^2} = \left(\int_{-\pi/h}^{\pi/h} |w(k)|^2 dk \right)^{1/2},$$

e os *produtos internos* correspondentes são definidos por

$$\langle v, w \rangle_{\ell_h^2} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j \overline{w_j} \quad \text{e} \quad \langle v, w \rangle_{L_h^2} = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} v(k) \overline{w(k)} dk.$$

No entanto, também será necessário definir o espaço

$$\ell_h^1 = \{v : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \|v\|_{\ell_h^1} < \infty\},$$

onde a *norma* é

$$\|v\|_{\ell_h^1} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j|.$$

Observação 2.2.2. Ao contrário dos espaços $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$, agora vale a inclusão

$$\ell_h^1 \subsetneq \ell_h^2.$$

De fato, se $v \in \ell_h^1$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} |v_j| &< 1, & \forall j \geq j_0, \\ |v_j|^2 &< |v_j|, & \forall j \geq j_0, \\ h \sum_{j \geq j_0} |v_j|^2 &\leq h \sum_{j \geq j_0} |v_j| < \infty, \end{aligned}$$

e portanto $v \in \ell_h^2$. Por outro lado, a série harmônica mostra que não vale a igualdade entre os conjuntos, pois ela pertence a ℓ_h^2 mas não pertence a ℓ_h^1 . \diamond

Definição 2.2.3. Para $v \in \ell_h^2$, define-se a *Transformada de Fourier Semidiscreta* $\hat{v} : [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\hat{v}(k) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j e^{-ikx_j}. \quad (2.4)$$

A série (2.4) aproxima a Transformada de Fourier (2.1) pela Regra do trapézio. De fato, se $v \in \ell_h^2$ é a restrição de $u \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \hat{u}(k) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m}^m u(x) e^{-ikx} dx \approx \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m}^{m-1} h \frac{(v_j e^{-ikx_j} + v_{j+1} e^{-ikx_{j+1}})}{2} \\ &= h \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{v_{-m} e^{-ikx_{-m}}}{2} + \sum_{j=-m}^{m-1} (v_j e^{-ikx_j}) - \frac{v_m e^{-ikx_m}}{2} \right] \\ &= h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j e^{-ikx_j} = \hat{v}(k). \end{aligned}$$

Os próximos resultados explicam por que a Transformada de Fourier Semidiscreta é definida apenas no domínio $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$.

Proposição 2.2.4. A função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x, k) = e^{ikx}$ é $\frac{2\pi}{h}$ -periódica com relação à segunda variável, se fixado qualquer $x_j \in h\mathbb{Z}$ na primeira variável.

Demonstração: Se $c \in \mathbb{Z}$,

$$f\left(x_j, k + \frac{2\pi}{h}c\right) = e^{i(k + \frac{2\pi}{h}c)x_j} = e^{ikx_j} \cdot e^{i\frac{2\pi}{h}cx_j} = e^{ikx_j} \cdot 1 = f(x_j, k).$$

Resta mostrar que não existe número menor que $\frac{2\pi}{h}$ que seja período da função $f(x_j, \cdot)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. De fato, se $k_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < k_0 < \frac{2\pi}{h}$, então

$$f(x_j, k + k_0) = e^{i(k+k_0)x_j} = e^{ikx_j} \cdot e^{ik_0x_j},$$

e como $k_0h < 2\pi$, para $j = 1$ segue que $e^{ik_0h} \neq 1$, e portanto

$$f(x_1, k + k_0) \neq f(x_1, k).$$

■

Corolário 2.2.5. Dada $v \in \ell_h^2$, a Transformada de Fourier Semidiscreta estendida à reta toda pela fórmula

$$\hat{v}(k) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-ikx_j} v_j, \quad k \in \mathbb{R},$$

é $\frac{2\pi}{h}$ -periódica.

Doravante, quando necessário, $\hat{v} \in L_h^2$ será considerada com domínio \mathbb{R} e $\frac{2\pi}{h}$ -periódica.

Teorema 2.2.6. [Fórmula de aliasing ou do somatório de Poisson] Se $u \in L^2(\mathbb{R})$ tem a primeira derivada de variação limitada e se v é a restrição de u à malha $h\mathbb{Z}$, então, para todo $k \in [-\pi/h, \pi/h]$,

$$\hat{v}(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{u}\left(k + \frac{2\pi}{h}j\right).$$

Definição 2.2.7. Para $w \in L_h^2$ a Transformada de Fourier Semidiscreta Inversa $\check{w} : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\check{w}(x_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} w(k) e^{ikx_j} dk = \langle w, E_j \rangle_{L_h^2}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

onde $E_j \in L_h^2$ é definida por $E_j(k) = e^{-ikx_j}$.

A integral em (2.5) aproxima a Transformada de Fourier Inversa (2.2) por truncamento da integral.

Teorema 2.2.8. [Propriedades da Transformada de Fourier Semidiscreta]
 Se $v, w \in \ell_h^2$ e $c \in \mathbb{C}$, então

1. $\hat{v}, \hat{w} \in L_h^2$.
2. O operador $\wedge : \ell_h^2 \rightarrow L_h^2$ é bijetivo. (Vide [16], p. 138.)
3. Linearidade: $(v + cw)^\wedge = \hat{v} + c\hat{w}$.
4. Translação: Se $j_0 \in \mathbb{Z}$ e $w_j = v_{j+j_0}$, então $\hat{w}(k) = e^{ikx_{j_0}} \hat{v}(k)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
5. Modulação: Se $k_0 \in \mathbb{R}$ e $f_j = e^{ik_0 x_j}$, então $(f.v)^\wedge(k) = \hat{v}(k - k_0)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
6. Conjugação: $\hat{\bar{v}}(k) = \overline{\hat{v}(-k)}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
7. Identidade de Parseval: $\|\hat{v}\|_{L_h^2} = \sqrt{2\pi} \|v\|_{\ell_h^2}$. (Vide [16], p. 138.)
8. Inversão: $v_j = \hat{\vee}(x_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx_j} \hat{v}(k) dk$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

[Propriedades de simetria]

9. v é par (ímpar) $\iff \hat{v}$ é par (ímpar).
10. $\text{Im } v \subset \mathbb{R} \iff \hat{v}(k) = \overline{\hat{v}(-k)}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
11. $\text{Im } v \subset i\mathbb{R} \iff \hat{v}(k) = -\overline{\hat{v}(-k)}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
12. $\text{Im } v \subset \mathbb{R}$ e v é par $\iff \text{Im } \hat{v} \subset \mathbb{R}$ e \hat{v} é par.
13. $\text{Im } v \subset \mathbb{R}$ e v é ímpar $\iff \text{Im } \hat{v} \subset i\mathbb{R}$ e \hat{v} é ímpar.
14. $\text{Im } v \subset i\mathbb{R}$ e v é par $\iff \text{Im } \hat{v} \subset i\mathbb{R}$ e \hat{v} é par.
15. $\text{Im } v \subset i\mathbb{R}$ e v é ímpar $\iff \text{Im } \hat{v} \subset \mathbb{R}$ e \hat{v} é ímpar.

Definição 2.2.9. A *convolução semidiscreta* de duas funções $v, w : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por (quando o somatório converge)

$$(v * w)_m = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_{m-j} w_j, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

A série (2.6) aproxima a convolução (2.3) nos pontos de $h\mathbb{Z}$ pela Regra do trapézio. De fato, se $v \in \ell_h^1$ é a restrição de $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ e $w \in \ell_h^2$ é a restrição de $y \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned}
 (u * y)(x_m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n u(x_m - x)y(x)dx \\
 &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^{n-1} h \frac{(v_{m-j}w_j + v_{m-(j+1)}w_{j+1})}{2} \\
 &= h \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{v_{m+n}w_{-n}}{2} + \sum_{j=-n}^{n-1} (v_{m-j}w_j) - \frac{v_{m-n}w_n}{2} \right] \\
 &= h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_{m-j}w_j = (v * w)_m.
 \end{aligned}$$

Neste contexto, a convolução semidiscreta também tem a propriedade de que, se $v \in \ell_h^2$ e $w \in \ell_h^1$, ou vice-versa, então $v * w \in \ell_h^2$ e

$$(v * w)^\wedge(k) = \hat{v}(k)\hat{w}(k).$$

Teorema 2.2.10. *[Efeito da discretização na Transformada de Fourier]*
Dada $u \in L^2(\mathbb{R})$ com u' de variação limitada e v a restrição de u à malha $h\mathbb{Z}$, tem-se, para todo $k \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$:

1. Se u tem $n-1$ derivadas contínuas em $L^2(\mathbb{R})$, para algum $n \geq 0$ inteiro, e $u^{(n)}$ é de variação limitada, então,

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(h^{n+1}) \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

2. Se u tem infinitas derivadas contínuas em $L^2(\mathbb{R})$, então, para todo $k \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$,

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(h^m) \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

para todo $m \geq 0$ inteiro.

3. Se existem constantes $a, c > 0$ tais que u é a restrição em \mathbb{R} de uma função U analítica na faixa $\{z \in \mathbb{C}; |Imz| < a\}$ que satisfaz

$$\|U(\cdot + iy)\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x + iy)|^2 dx \leq c, \quad \text{para todo } |y| < a,$$

então, para todo $\epsilon > 0$,

$$|\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = O(e^{-\pi(a-\epsilon)/h}) \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

4. Se u é a restrição em \mathbb{R} de uma função U analítica em \mathbb{C} e existe $a > 0$ tais que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|U(z)| = o(e^{a|z|}) \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty,$$

então, desde que $h \leq \pi/a$,

$$\hat{v}(k) = \hat{u}(k).$$

2.3 Transformada de Fourier Discreta

Agora sim o contexto é de funções discretizadas e com quantidade finita de dados, ou periódicas de período 2π . Mais precisamente, dividindo o intervalo $[0, 2\pi]$ em um **número par** N de partes iguais com comprimento $h = 2\pi/N$, são consideradas funções $v : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que,

$$\text{se } j \cong m \pmod{N}, \text{ então } v_j = v_m.$$

Neste caso pode-se dizer também que v é uma função N -periódica com relação à malha. A equação

$$\frac{\pi}{h} = \frac{N}{2} \tag{2.7}$$

será frequentemente utilizada.

Definição 2.3.1. Neste contexto, os espaços a serem trabalhados no domínio físico e das frequências são, respectivamente,

$$\ell_N^2 = \{v : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; v \text{ é } N\text{-periódica com relação à malha}\},$$

$$L_N^2 = \{w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; w \text{ é } N\text{-periódica com relação à malha}\},$$

e as respectivas normas são definidas por

$$\|v\|_{\ell_N^2} = \left(h \sum_{j=1}^N |v_j|^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|w\|_{L_N^2} = \left(\sum_{k=-N/2+1}^{N/2} |w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Os espaços ℓ_N^2 e L_N^2 têm dimensão finita N e as normas são sempre finitas, pois os somatórios têm um número finito de termos.

Definição 2.3.2. Para $v \in \ell_N^2$ a *Transformada de Fourier Discreta* $\hat{v} : 1\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\hat{v}_k = h \sum_{j=1}^N v_j e^{-ikx_j}. \quad (2.8)$$

O somatório (2.8) aproxima a Transformada de Fourier Semidiscreta (2.4) por truncamento.

Observação 2.3.3. Em virtude da proposição 2.2.4 e como v é N -periódica com relação à malha $h\mathbb{Z}$, segue que a Transformada de Fourier Discreta é N -periódica com relação à malha $1\mathbb{Z}$.

◇

Definição 2.3.4. Para $w \in L_N^2$ a *Transformada de Fourier Discreta Inversa* $\check{w} : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$\check{w}_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} w_k e^{ikx_j}. \quad (2.9)$$

Teorema 2.3.5. [Propriedades da Transformada de Fourier Discreta] *Se $v, w \in \ell_N^2$ e $c \in \mathbb{C}$, então*

1. $\hat{v}, \hat{w} \in L_N^2$. (Vide proposição 2.2.4)
2. *Linearidade:* $(v + cw)^\wedge = \hat{v} + c\hat{w}$.
3. *Translação:* Se $j_0 \in \mathbb{Z}$ e $w_j = v_{j+j_0}$, então $\hat{w}_k = e^{ikx_{j_0}} \hat{v}_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
4. *Modulação:* Se $k_0 \in \mathbb{Z}$ e $f_j = e^{ik_0 x_j}$, então $(f.v)^\wedge_k = \hat{v}_{k-k_0}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
5. *Conjugação:* $\overline{\hat{v}_k} = \hat{v}_{-k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
6. *Identidade de Parseval:* $\|\hat{v}\|_{L_N^2} = \sqrt{2\pi} \|v\|_{\ell_N^2}$.
7. *Inversão:* $\check{v}_k = \frac{1}{2\pi h} \hat{v}_{-k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
8. *Fórmula de inversão:* $v_j = \check{\hat{v}}(x_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}_k$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

[Propriedades de simetria]

9. v é par (ímpar) $\iff \hat{v}$ é par (ímpar).
10. $\text{Im } v \subset \mathbb{R} \iff \hat{v}_k = \overline{\hat{v}_{-k}}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
11. $\text{Im } v \subset i\mathbb{R} \iff \hat{v}_k = -\overline{\hat{v}_{-k}}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
12. $\text{Im } v \subset \mathbb{R}$ e v é par $\iff \text{Im } \hat{v} \subset \mathbb{R}$ e \hat{v} é par.
13. $\text{Im } v \subset \mathbb{R}$ e v é ímpar $\iff \text{Im } \hat{v} \subset i\mathbb{R}$ e \hat{v} é ímpar.
14. $\text{Im } v \subset i\mathbb{R}$ e v é par $\iff \text{Im } \hat{v} \subset i\mathbb{R}$ e \hat{v} é par.
15. $\text{Im } v \subset i\mathbb{R}$ e v é ímpar $\iff \text{Im } \hat{v} \subset \mathbb{R}$ e \hat{v} é ímpar.

Definição 2.3.6. A *convolução discreta* de duas funções $v, w \in \ell_N^2$ é definida por

$$(v * w)_m = h \sum_{j=1}^N v_{m-j} w_j, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

Como v e w são periódicas de mesmo período, $v * w$ também o é. O somatório (2.10) é o truncamento da convolução semidiscreta (2.6). Neste contexto, a convolução discreta também tem a propriedade de que, se $v, w \in \ell_N^2$, então

$$(v * w)^\wedge(k) = \hat{v}_k \hat{w}_k.$$

Um fato importante sobre a Transformada de Fourier Discreta é que ela pode ser calculada computacionalmente de forma muito rápida pelo algoritmo recursivo conhecido por Transformada Rápida de Fourier (FFT — *Fast Fourier Transform*). Uma implementação direta de (2.8) ou (2.9) requer um número de operações na ordem de N^2 , enquanto que o número de operações do algoritmo da FFT está na ordem de apenas $N \log_2 N$, quando N é uma potência de 2. Um estudo mais aprofundado sobre FFT é feito em [10].

O MATLAB já traz o algoritmo da FFT implementado. O comando `fft` calcula a Transformada de Fourier Discreta e o comando `ifft` calcula a Transformada de Fourier Discreta Inversa. Eles serão utilizados nos experimentos do capítulo 4.

As Transformadas de Fourier estudadas neste capítulo, assim como suas principais propriedades, constituem a base teórica que fundamenta os métodos espectrais de derivação que serão apresentados no capítulo 3.

Capítulo 3

Métodos Espectrais de Derivação

O problema considerado neste capítulo é o seguinte: conhecendo os valores de uma função u na malha $h\mathbb{Z}$, $\{u(x_j)\}$, como aproximar a derivada de u usando apenas estes dados? Os métodos apresentados para este fim são chamados de espectrais porque são baseados no espectro da função u , isto é, os valores no domínio das frequências da Transformada de Fourier (Semidiscreta ou Discreta) da função.

Na primeira seção são consideradas funções não periódicas, e portanto é necessário trabalhar com uma quantidade infinita de dados, onde utiliza-se a Transformada de Fourier Semidiscreta. Na segunda seção é feito o mesmo estudo, porém supondo que u é periódica, o que reduz a um número finito de dados, e portanto utiliza-se a Transformada de Fourier Discreta.

3.1 Primeiro Método Espectral — Funções não Periódicas

O objetivo do método espectral apresentado a seguir é aproximar a derivada de uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nos pontos da malha $h\mathbb{Z}$. Em toda a seção, a discretização da função u aos pontos da malha é denotada por v , com $v \in \ell_h^2$.

Primeiro Método Espectral	
Dada uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cuja discretização é $v \in \ell_h^2$:	
Passo 1.	Calcular a Transformada de Fourier Semidiscreta \hat{v} por (2.4).
Passo 2.	Estender \hat{v} à reta toda zerando fora do intervalo $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$; Notação da função estendida: \hat{p}_v . Calcular a Transformada de Fourier Inversa de \hat{p}_v por (2.2); A função resultante p_v é o interpolador de v .
Passo 3.	Calcular a derivada do interpolador, p'_v .
Passo 4.	Definir $w : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ por $w_j = p'_v(x_j)$.

A função w definida no passo 4 do método é a que aproxima os valores da derivada de u nos pontos da malha.

A figura 3.1 é uma representação do método para a função gaussiana $u(x) = e^{-x^2}$. A função w não está representada na figura, mas ela é a discretização da “derivada do interpolador da gaussiana no domínio físico”, situada na última linha e primeira coluna da figura.

O passo 2 parece complicado, mas ele pode ser simplificado. Primeiramente, define-se a função

$$\hat{p}_v(k) = \begin{cases} \hat{v}(k), & \text{se } k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \\ 0, & \text{se } k \notin \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]. \end{cases}$$

Depois, pode-se encontrar a seguinte fórmula para o interpolador,

$$p_v(x) = \check{p}_v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_v(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{v}(k) e^{ikx} dk. \quad (3.1)$$

Portanto, o passo 2 resume-se à aplicação da fórmula (3.1).

Observação 3.1.1. Como $\hat{p}_v \in L^2(\mathbb{R})$ tem suporte compacto contido no intervalo $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$, pelo item 4 do teorema 2.1.16, tem-se que o interpolador p_v é uma função analítica com decaimento exponencial, quando $|x| \rightarrow \infty$.

◇

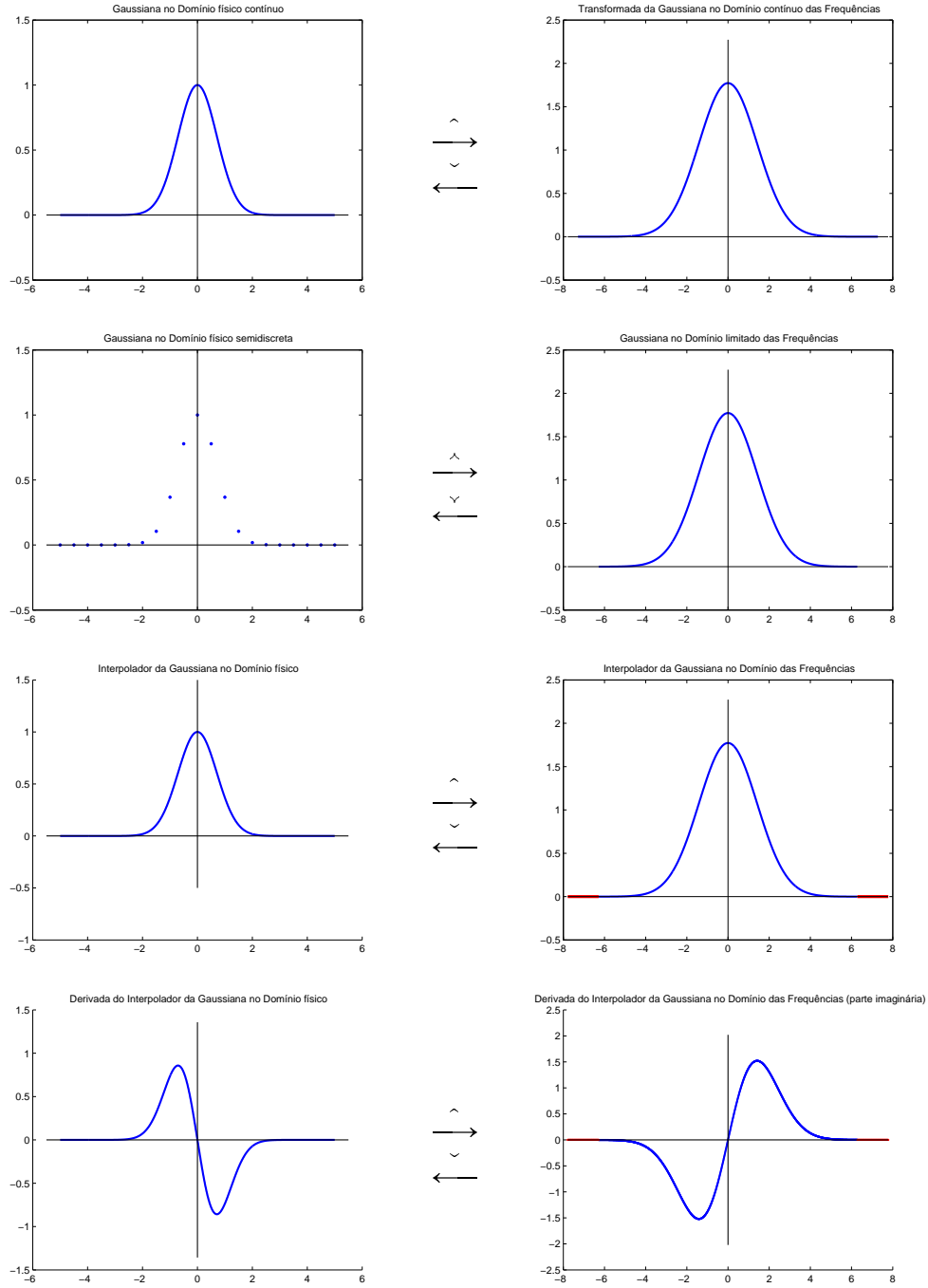


Figura 3.1: Representação do primeiro método espectral aplicado à função gaussiana e^{-x^2} .

3.1.1 Interpolador da delta de Kronecker - função Sinc

Para cada $m \in \mathbb{Z}$, define-se uma função *delta de Kronecker* $\delta^m \in \ell_h^2$ por

$$\delta^m(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = m \\ 0, & \text{se } j \neq m. \end{cases}$$

Observação 3.1.2. O conjunto $\{\delta^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é base de Schauder de ℓ_h^2 ([8], p. 68). De fato, para qualquer função $v \in \ell_h^2$, tem-se a igualdade pontual

$$v_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \delta^m(x_j), \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

porque o somatório possui um único termo não nulo, logo,

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{m=-N}^N v_m \delta^m \right\|_{\ell_h^2}^2 &= h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j - \sum_{m=-N}^N v_m \delta^m(x_j)|^2 \\ &= h \sum_{|j| > N} |v_j|^2 \rightarrow 0, \text{ quando } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ou seja, tem-se a igualdade

$$v = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \delta^m \tag{3.2}$$

na norma $\|\cdot\|_{\ell_h^2}$.

◇

Observação 3.1.3. O conjunto $\{\delta^m\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \ell_h^2$ é ortogonal completo. De fato, é ortogonal porque

$$\langle \delta^m, \delta^n \rangle_{\ell_h^2} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta^m(x_j) \overline{\delta^n(x_j)} = \begin{cases} h, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n, \end{cases}$$

e é completo pois ℓ_h^2 é espaço de Hilbert e, se $v \in \ell_h^2$ é tal que $v \perp \{\delta^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle v, \delta^m \rangle_{\ell_h^2} &= 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \\ h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j \overline{\delta^m(x_j)} &= 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \\ hv_m &= 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$v = 0 \in \ell_h^2,$$

(vide caracterização de conjunto completo em [8], p. 169).

◇

Segue abaixo a aplicação do primeiro método espectral, passo a passo, para as funções δ^m , para cada m (a figura 3.2 ilustra o caso $m = 0$).

Passo 1. Calcular a Transformada de Fourier Semidiscreta de δ^m :

$$\hat{\delta}^m(k) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta^m(x_j) e^{-ikx_j} = h e^{-ikx_m}. \quad (3.3)$$

Observação 3.1.4. Em particular, $\hat{\delta}^0(k) = h e^{-ikx_0} = h$.

◇

Passo 2. Calcular o interpolador de δ^m , para $x \neq x_m$:

$$\begin{aligned} p_{\delta^m}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{\delta}^m(k) e^{ikx} dk = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ik(x-x_m)} dk \\ &= \frac{h}{\pi(x-x_m)} \frac{e^{i\frac{\pi}{h}(x-x_m)} - e^{-i\frac{\pi}{h}(x-x_m)}}{2i} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{h}(x-x_m)}{\frac{\pi}{h}(x-x_m)}, \end{aligned}$$

e, para $x = x_m$,

$$p_{\delta^m}(x_m) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ik0} dk = 1.$$

Ou seja, o interpolador de δ^m é a função sinc transladada em x_m e denotada por $S_h(x - x_m)$,

$$p_{\delta^m}(x) = S_h(x - x_m) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{h}(x-x_m)}{\frac{\pi}{h}(x-x_m)}, & \text{se } x \neq x_m \\ 1, & \text{se } x = x_m. \end{cases} \quad (3.4)$$

Observação 3.1.5. A observação 3.1.1 prevê que a função p_{δ^m} é analítica. Pode-se confirmar este fato utilizando a conhecida expansão em série de potências da função seno, $\operatorname{sen}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$, donde segue que

$$p_{\delta^m}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \left(\frac{\pi}{h}(x-x_m) \right)^{2j}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

E esta série é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, o que verifica-se pelo teste da

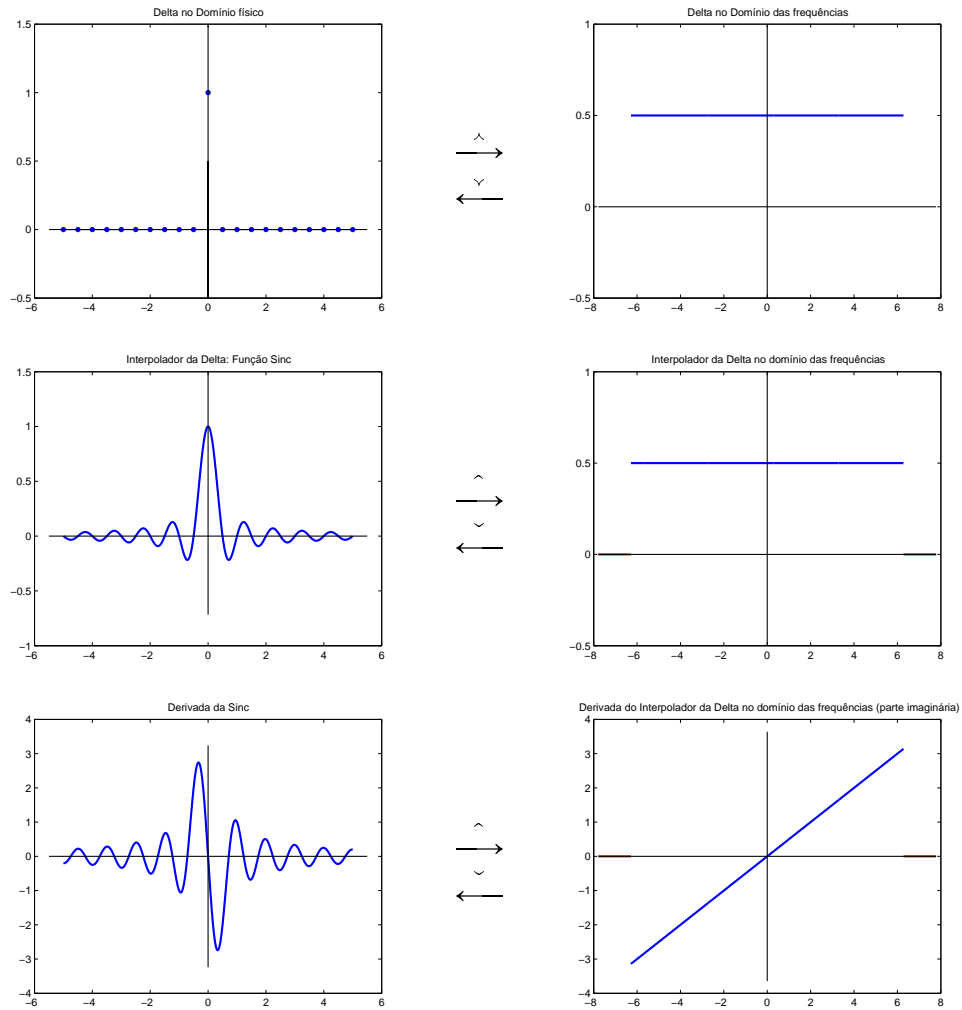


Figura 3.2: Representação do primeiro método espectral aplicado à função delta: δ^0 .

razão:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{j+1}}{(2(j+1)+1)!} \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^{2(j+1)} \right|}{\left| \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^{2j} \right|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\left| \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^2 \right|}{(2j+3)(2j+2)} = 0 < 1.$$

Portanto, de fato p_{δ^m} é analítica e, consequentemente, a sua derivada p'_{δ^m} também o é.

◇

Passo 3. Calcular a derivada do interpolador, para $x \neq x_m$, derivando termo a termo a série de potências (3.5):

$$p'_{\delta^m}(x) = S'_h(x - x_m) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2j}{(2j+1)!} \frac{\pi}{h} \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^{2j-1}.$$

Como $\frac{2j}{(2j+1)!} = \frac{2j+1-1}{(2j+1)!} = \frac{2j+1}{(2j+1)!} - \frac{1}{(2j+1)!} = \frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}$, segue

$$\begin{aligned} p'_{\delta^m}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{(2j)!} \frac{\pi}{h} \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^{2j-1} - \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \frac{\pi}{h} \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^{2j-1} \right] \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^{2j} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \left(\frac{\pi}{h}(x - x_m) \right)^{2j}}{x - x_m} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{h}(x - x_m) - S_h(x - x_m)}{x - x_m}. \end{aligned}$$

Para $x = x_m$, como p'_{δ^m} é analítica, basta calcular o limite (via Regra de l'Hôpital):

$$\begin{aligned} p'_{\delta^m}(x_m) &= S'_h(0) = \lim_{x \rightarrow x_m} p'_{\delta^m}(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_m} \frac{1}{x - x_m} \left(\cos \frac{\pi}{h}(x - x_m) - S_h(x - x_m) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_m} \left(-\frac{\pi}{h} \operatorname{sen} \frac{\pi}{h}(x - x_m) - S'_h(x - x_m) \right) \\ &= -S'_h(0), \end{aligned}$$

portanto $p'_{\delta^m}(x_m) = 0$.

Ou seja, a derivada do interpolador é

$$p'_{\delta^m}(x) = S'_h(x - x_m) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{\pi}{h}(x - x_m) - S_h(x - x_m)}{x - x_m}, & \text{se } x \neq x_m \\ 0, & \text{se } x = x_m. \end{cases} \quad (3.6)$$

Passo 4. Para $x_j \in h\mathbb{Z}$ com $j \neq m$, (lembrando que $x_j - x_m = (j - m)h$, com $j - m \in \mathbb{Z}$)

$$p'_{\delta^m}(x_j) = \frac{1}{(j - m)h} \left(\cos \pi(j - m) - \frac{\sin \pi(j - m)}{\pi(j - m)} \right) = \frac{(-1)^{j-m}}{(j - m)h}.$$

Portanto, o método espectral aplicado à função δ^m resulta em

$$w_j = p'_{\delta^m}(x_j) = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-m}}{(j-m)h}, & \text{se } j \neq m \\ 0, & \text{se } j = m. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.1.2 Interpolador em ℓ_h^2

A aplicação do primeiro método espectral para uma função $v \in \ell_h^2$ qualquer fica facilitada pelos resultados obtidos para as funções delta de Kronecker. É o que será descrito a seguir, passo a passo.

Passo 1. Aplicar a Transformada de Fourier Semidiscreta (2.4), lembrando que $\hat{\delta^m}(k) = h e^{-ikx_m}$,

$$\hat{v}(k) = h \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m e^{-ikx_m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \hat{\delta^m}(k), \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]. \quad (3.8)$$

Passo 2. Calcular o interpolador pela expressão (3.1):

$$\begin{aligned} p_v(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{v}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \left\langle \hat{v}, e^{-i \cdot x} \right\rangle_{L_h^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \hat{\delta^m}, e^{-i \cdot x} \right\rangle_{L_h^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \left\langle \hat{\delta^m}, e^{-i \cdot x} \right\rangle_{L_h^2} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{\delta^m}(k) e^{ikx} dk = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m p_{\delta^m}(x), \end{aligned}$$

(para trocar a ordem do somatório com o produto interno usa-se a bilinearidade do produto interno e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vide [8], p. 138). Ou seja, o interpolador de v é escrito como combinação das funções do tipo sinc em (3.4):

$$p_v(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m p_{\delta^m}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m S_h(x - x_m). \quad (3.9)$$

Observação 3.1.6. Nos pontos da malha, o interpolador coincide com a função original:

$$p_v(x_j) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m S_h(x_j - x_m) = v_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq j}} v_m \frac{\sin \frac{\pi}{h}(j-m)h}{\frac{\pi}{h}(j-m)h} = v_j = u(x_j).$$

◇

Observação 3.1.7. No caso particular em que a função $u \in L^2(\mathbb{R})$ (supondo-se que sua discretização é $v \in \ell_h^2$) é de banda limitada contida no intervalo $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$, isto é, tal que $\hat{u}(k) = 0$ para todo $k \notin [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$, o teorema da amostragem de Shannon ([9], p. 11) mostra que o interpolador p_v coincide com a função u , ou, em outras palavras, a função u pode ser reconstruída a partir dos seus valores na malha $h\mathbb{Z}$:

$$u(x) = p_v(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(x_m) S_h(x - x_m).$$

◇

Passo 3. Calcular a derivada do interpolador:

$$p'_v(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m p'_{\delta^m}(x).$$

Portanto,

$$p'_v(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m S'_h(x - x_m) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ x_m \neq x}} v_m \frac{\cos \frac{\pi}{h}(x - x_m) - S_h(x - x_m)}{x - x_m}. \quad (3.10)$$

Passo 4. Avaliar p'_v em $x_j \in h\mathbb{Z}$,

$$w_j = p'_v(x_j) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m p'_{\delta^m}(x_j) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq j}} v_m \frac{(-1)^{j-m}}{(j-m)h}. \quad (3.11)$$

A derivada de uma função cuja discretização coincide com $v \in \ell_h^2$ é aproximada na malha pela função $w : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela equação (3.11). Esta equação pode ser representada matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = h^{-1} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \\ & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & \\ & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ v_{-2} \\ v_{-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

onde a “matriz duplamente infinita” corresponde a um operador em ℓ_h^2 do tipo Toeplitz.

3.1.3 Segundo método espectral - Forma alternativa

Outro método para derivação espectral, equivalente ao primeiro, é baseado na propriedade da Transformada de Fourier da função derivada, $\hat{u}'(k) = ik\hat{u}(k)$ (teorema 2.1.12, item 1). A seguir são apresentados os detalhes:

Segundo Método Espectral
Dada uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cuja discretização é $v \in \ell_h^2$:
Passo 1. Calcular a Transformada de Fourier Semidiscreta \hat{v} por (2.4).
Passo 2. Definir $\hat{w}_v(k) = ik\hat{v}(k)$.
Passo 3. Calcular w_v a partir de \hat{w}_v por (2.5).

Este processo pode ser aplicado às funções δ^m :

Passo 1. Já calculado em (3.3):

$$\hat{\delta}^m(k) = he^{-ikx_m}.$$

Passo 2. Definir

$$\hat{w}_{\delta^m}(k) = ik\hat{\delta}^m(k) = ikhe^{-ikx_m}.$$

Passo 3. Para $j \neq m$, usa-se integração por partes:

$$\begin{aligned} w_{\delta^m}(x_j) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} ik\hat{\delta}^m(k)e^{ikx_j} dk = \frac{ih}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} ke^{ih(j-m)k} dk \\ &= \frac{ih}{2\pi} \left[\frac{ke^{ih(j-m)k}}{ih(j-m)} \right]_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} - \frac{ih}{2\pi} \frac{1}{ih(j-m)} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ih(j-m)k} dk \\ &= \frac{(e^{i(j-m)\pi} + e^{-i(j-m)\pi})}{2h(j-m)} - \frac{(e^{i(j-m)\pi} - e^{-i(j-m)\pi})}{2i\pi h(j-m)^2} \\ &= \frac{\cos(j-m)\pi}{(j-m)h} - \frac{\sin(j-m)\pi}{\pi h(j-m)^2} = \frac{(-1)^{j-m}}{(j-m)h}. \end{aligned}$$

E, para $j = m$,

$$w_{\delta^j}(x_j) = \frac{ih}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} ke^0 dk = 0.$$

Agora, usando os resultados obtidos para as funções δ^m , pode-se aplicar o segundo método espectral para uma função $v \in \ell_h^2$ qualquer.

Passo 1. Já calculado em (3.8):

$$\hat{v}(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \hat{\delta}^m(k).$$

Passo 2. Definir

$$\hat{w}_v(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m ik\hat{\delta}^m(k).$$

Passo 3. Calcular

$$\begin{aligned}
 w_v(x_j) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikx_j} \sum_{m \in \mathbb{Z}} ik \hat{\delta}^m(k) v_m dk \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} ik \hat{\delta}^m(k) e^{ikx_j} dk \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m w_{\delta^m}(x_j).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$w_v(x_j) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq j}} v_m \frac{(-1)^{j-m}}{(j-m)h}. \quad (3.12)$$

Apesar dos caminhos dos dois métodos apresentados serem diferentes, o resultado obtido em (3.12) é o mesmo que em (3.11). Neste sentido afirma-se que os dois métodos são equivalentes.

3.1.4 Precisão do método espectral

Teorema 3.1.8. *Dada $u \in L^2(\mathbb{R})$ com $u^{(n)}$ ($n \geq 1$) de variação limitada, seja $w : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ a função resultante de n aplicações sucessivas do método espectral à restrição de u à malha $h\mathbb{Z}$. Tem-se:*

1. *Se u tem $m-1$ derivadas contínuas em $L^2(\mathbb{R})$, para algum $m \geq n+1$ inteiro, e $u^{(m)}$ é de variação limitada, então, para todo $j \in \mathbb{Z}$,*

$$|w_j - u^{(n)}(x_j)| = O(h^{m-n}) \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

2. *Se u tem infinitas derivadas contínuas em $L^2(\mathbb{R})$, então, $\forall j \in \mathbb{Z}$,*

$$|w_j - u^{(n)}(x_j)| = O(h^l) \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

para todo $l \geq 0$ inteiro.

3. *Se existem constantes $a, c > 0$ tais que u é a restrição em \mathbb{R} de uma função U analítica na faixa $\{z \in \mathbb{C}; |Im z| < a\}$ que satisfaz*

$$\|U(\cdot + iy)\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x + iy)|^2 dx \leq c, \quad \text{para todo } |y| < a,$$

então, para todo $\epsilon > 0$,

$$|w_j - u^{(n)}(x_j)| = O(e^{-\pi(a-\epsilon)/h}) \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

4. Se u é a restrição em \mathbb{R} de uma função U analítica em \mathbb{C} e existe $a > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|U(z)| = o(e^{a|z|}) \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty,$$

então, desde que $h \leq \pi/a$,

$$w_j = u^{(n)}(x_j).$$

Observação 3.1.9. O teorema 3.1.8 é consequência do teorema 2.2.10. Outro caminho para demonstrar o item 4 é utilizando o item 4 do teorema 2.1.16 e o teorema de amostragem de Shannon (vide observação 3.1.7).

◇

3.2 Terceiro Método Espectral — Funções Periódicas

O objetivo agora é análogo ao da seção anterior, mas considerando funções $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que são 2π -periódicas e com discretização v pertencentes a ℓ_N^2 , com N par. Esta suposição é feita para esta seção inteira.

Antes de apresentar o terceiro método espectral, é importante fazer alguns comentários de ordem técnica, para evitar problemas com a derivada do interpolador que é definido a seguir. O problema é que, na Transformada de Fourier Discreta Inversa (2.9), a maior frequência não tem o correspondente simétrico na menor frequência negativa. Isto pode ocasionar resultados indesejáveis para a derivada do interpolador (vide exemplo em [12], p. 19).

Pode-se corrigir este problema reequilibrando a última frequência: como $\hat{v}_{-N/2} = \hat{v}_{N/2}$ (vide observação 2.3.3) e $e^{iNx_j} = e^{i2\pi j} = 1$, segue que

$$e^{i\frac{N}{2}x_j} \hat{v}_{N/2} = \frac{1}{2}e^{i(N-\frac{N}{2})x_j} \hat{v}_{-N/2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{N}{2}x_j} \hat{v}_{N/2} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{N}{2})x_j} \hat{v}_{-N/2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{N}{2}x_j} \hat{v}_{N/2}.$$

Portando, a Transformada de Fourier Discreta Inversa (2.9) pode ser reescrita

como segue,

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2}{}' e^{ikx_j} \hat{v}(k),$$

onde a linha à frente do somatório significa que os termos correspondentes aos índices $k = \pm N/2$ são multiplicados por $\frac{1}{2}$.

Agora sim, com as frequências simétricas, pode-se definir o interpolador pela fórmula

$$p_v(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2}{}' \hat{v}(k) e^{ikx}. \quad (3.13)$$

Observação 3.2.1. O interpolador p_v é uma função 2π -periódica (vide observação 2.3.3) e analítica (somatório finito de funções analíticas).

◇

Terceiro Método Espectral
Dada uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -periódica, cuja discretização é $v \in \ell_N^2$:
Passo 1. Calcular a Transformada de Fourier Discreta \hat{v} por (2.8).
Passo 2. Calcular o interpolador p_v por (3.13).
Passo 3. Calcular a derivada do interpolador, p'_v .
Passo 4. Definir $w : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ por $w_j = p'_v(x_j)$.

3.2.1 Interpolador da delta de Kronecker - Sinc periódica

Para cada $m \in \mathbb{Z}$, define-se uma função *delta de Kronecker periódica* $\delta^m \in \ell_N^2$ por

$$\delta^m(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j \cong m \pmod{N} \\ 0, & \text{se } j \not\cong m \pmod{N}. \end{cases}$$

Segue abaixo a aplicação do terceiro método espectral, passo a passo, para as funções δ^m , para cada m (a figura 3.3 ilustra o caso $m = 0$).

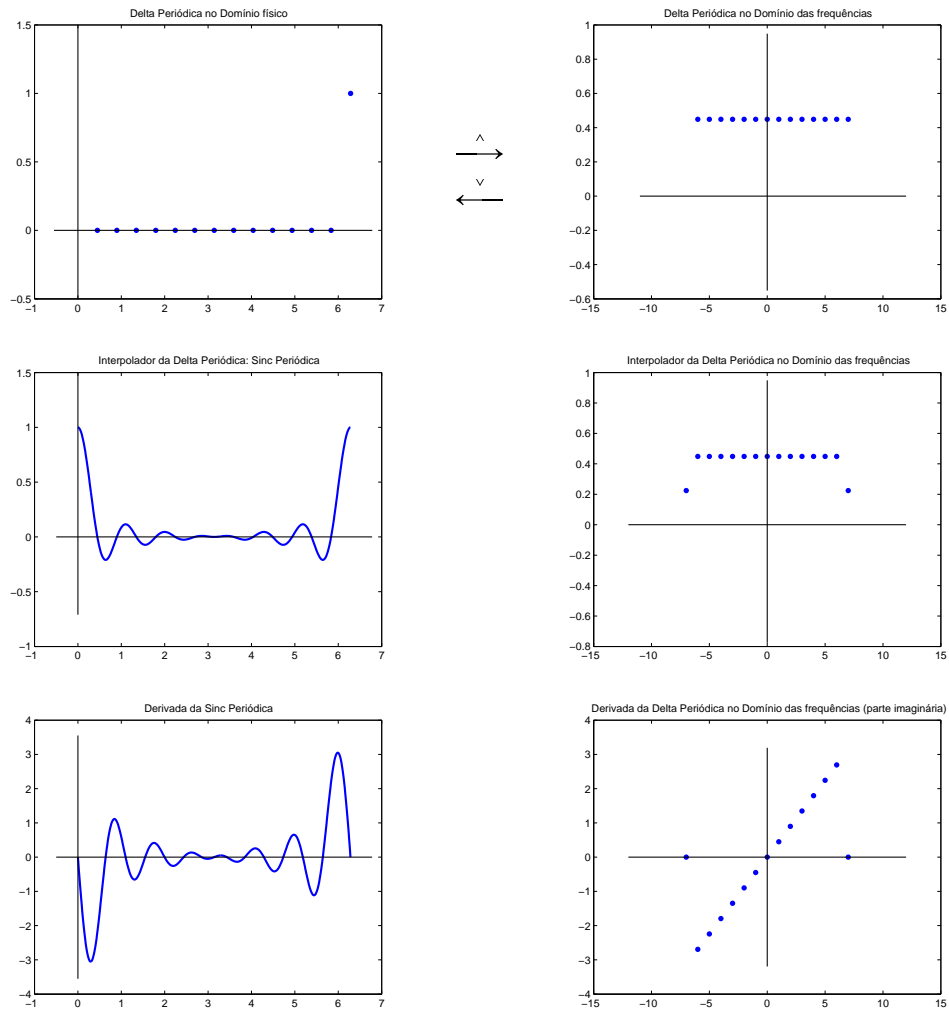


Figura 3.3: Representação do primeiro método espectral aplicado à função delta periódica: δ^0 .

Passo 1. Aplicar a Transformada de Fourier Discreta (2.8):

$$\hat{\delta}^m(k) = h \sum_{j=1}^N \delta^m(x_j) e^{-ikx_j} = h e^{-ikx_m}. \quad (3.14)$$

Observação 3.2.2. Em particular, para $m = 0$, $\hat{\delta}^0(k) = h e^{-ikx_0} = h$.

◇

Passo 2. Calcular o interpolador de δ^m por (3.13). Para $x \in \mathbb{R}$ fora da malha $\{x_j \in h\mathbb{Z}; j \cong m \pmod{N}\}$:

$$\begin{aligned} p_{\delta^m}(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\delta}^m(k) e^{ikx} = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{ik(x-x_m)} \\ &= \frac{h}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} e^{ik(x-x_m)} + \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ik(x-x_m)} \right). \end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis dos somatórios $j = k + \frac{N}{2}$ e $j = k + \frac{N}{2} - 1$, respectivamente, segue

$$\begin{aligned} p_{\delta^m}(x) &= \frac{h}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[e^{i(-\frac{N}{2}+j)(x-x_m)} + e^{i(-\frac{N}{2}+1+j)(x-x_m)} \right] \right) \\ &= \frac{h}{2\pi} \left(\frac{e^{-i\frac{1}{2}(x-x_m)} + e^{i\frac{1}{2}(x-x_m)}}{2} \right) \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}+j)(x-x_m)} \\ &= \frac{h}{2\pi} \cos \left(\frac{1}{2}(x-x_m) \right) e^{i(-\frac{N}{2}+\frac{1}{2})(x-x_m)} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ij(x-x_m)}. \end{aligned}$$

Pela fórmula da soma de uma progressão geométrica finita,

$$\begin{aligned} p_{\delta^m}(x) &= \frac{h}{2\pi} \cos \left(\frac{1}{2}(x-x_m) \right) e^{-i\frac{N}{2}(x-x_m)} e^{i\frac{1}{2}(x-x_m)} \left(\frac{1 - e^{iN(x-x_m)}}{1 - e^{i(x-x_m)}} \right) \\ &= \frac{h \cos \left(\frac{1}{2}(x-x_m) \right)}{2\pi \left(\frac{1 - e^{i(x-x_m)}}{e^{i\frac{1}{2}(x-x_m)}} \right)} \left(e^{-i\frac{N}{2}(x-x_m)} - e^{i\frac{N}{2}(x-x_m)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)}{\left(\frac{e^{-i\frac{1}{2}(x-x_m)} - e^{i\frac{1}{2}(x-x_m)}}{2i}\right)} \left(\frac{e^{-i\frac{N}{2}(x-x_m)} - e^{i\frac{N}{2}(x-x_m)}}{2i}\right) \\
&= \frac{h}{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)} \sin\left(\frac{N}{2}(x-x_m)\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{N}{2}(x-x_m)\right)}{\frac{2\pi}{h} \tan\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)}.
\end{aligned}$$

E, para x na malha $\{x_j \in h\mathbb{Z}; j \cong m \pmod{N}\}$, como o interpolador é uma função analítica, basta usar a Regra de l'Hôpital,

$$\begin{aligned}
p_{\delta^m}(x_m) &= \lim_{x \rightarrow x_m} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(x-x_m)\right)}{\frac{2\pi}{h} \tan\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_m} \cos\left(\frac{\pi}{h}(x-x_m)\right) \cos^2\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right) = 1.
\end{aligned}$$

Portanto, o interpolador da δ^m é a função chamada de sinc 2π -periódica transladada em x_m e denotada por $S_N(x-x_m)$:

$$p_{\delta^m}(x) = S_N(x-x_m) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(x-x_m)\right)}{\frac{2\pi}{h} \tan\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)}, & \text{se } x \notin M \\ 1, & \text{se } x \in M, \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $M = \{x_j \in h\mathbb{Z}; j \cong m \pmod{N}\}$.

Passo 3. Calcular, para $x \notin \{x_j \in h\mathbb{Z}; j \cong m \pmod{N}\}$, a derivada do interpolador:

$$\begin{aligned}
p'_{\delta^m}(x) &= \frac{\frac{2\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h}(x-x_m)\right) \tan\left(\frac{x-x_m}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{h}(x-x_m)\right) \sec^2\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\frac{4\pi}{h} \tan^2\left(\frac{x-x_m}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{h}(x-x_m)\right)}{2 \tan\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(x-x_m)\right)}{\frac{4\pi}{h} \sin^2\left(\frac{1}{2}(x-x_m)\right)}.
\end{aligned}$$

E, para $x \in \{x_j \in h\mathbb{Z}; j \cong m \pmod{N}\}$, basta observar que p_{δ^0} é uma função par, então sua derivada p'_{δ^0} deve ser uma função ímpar, portanto $p'_{\delta^0}(0) = 0$. Da periodicidade, p'_{δ^0} zera em todos os múltiplos inteiros de 2π . Como p'_{δ^m} é apenas a translação em x_m de p'_{δ^0} , segue que

$$p'_{\delta^m}(x) = S'_N(x - x_m) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{h}(x - x_m)\right)}{2 \tan\left(\frac{1}{2}(x - x_m)\right)} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{h}(x - x_m)\right)}{\frac{4\pi}{h} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}(x - x_m)\right)}, & x \notin M \\ 0, & x \in M, \end{cases} \quad (3.16)$$

onde $M = \{x_j \in h\mathbb{Z}; j \cong m \pmod{N}\}$.

Passo 4. Pela equação (3.16), avaliando nos pontos x_j ,

$$w_j = p'_{\delta^m}(x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{j-m} \cot\left(\frac{(j-m)h}{2}\right), & \text{se } j \not\cong m \pmod{N} \\ 0, & \text{se } j \cong m \pmod{N}. \end{cases} \quad (3.17)$$

3.2.2 Interpolador em ℓ_N^2

A aplicação do terceiro método espectral para uma função $v \in \ell_N^2$ qualquer fica facilitada pelos resultados obtidos para as funções delta de Kronecker periódicas. É o que será descrito a seguir, passo a passo.

Passo 1. Aplicar a Transformada de Fourier Discreta (2.8), lembrando que $\hat{\delta^m}(k) = h e^{-ikx_m}$,

$$\hat{v}(k) = h \sum_{m=1}^N v_m e^{-ikx_m} = \sum_{m=1}^N v_m \hat{\delta^m}(k). \quad (3.18)$$

Passo 2. Calcular o interpolador (3.13):

$$\begin{aligned} p_v(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \left(\sum_{m=1}^N v_m \hat{\delta^m}(k) \right) e^{ikx} \\ &= \sum_{m=1}^N v_m \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\delta^m}(k) e^{ikx} \right) = \sum_{m=1}^N v_m p_{\delta^m}(x). \end{aligned}$$

Em resumo,

$$p_v(x) = \sum_{m=1}^N v_m p_{\delta^m}(x) = \sum_{m=1}^N v_m S_N(x - x_m). \quad (3.19)$$

Passo 3. Calcular a derivada do interpolador:

$$p'_v(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{m=1}^N v_m p_{\delta^m}(x) \right) = \sum_{m=1}^N v_m p'_{\delta^m}(x) = \sum_{m=1}^N v_m S'_N(x - x_m). \quad (3.20)$$

Passo 4. Avaliar em $x_j \in h\mathbb{Z}$,

$$w_j = p'_v(x_j) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \not\equiv j \pmod{N}}}^N v_m \frac{1}{2} (-1)^{j-m} \cot \left(\frac{(j-m)h}{2} \right). \quad (3.21)$$

A derivada de uma função cuja discretização coincide com $v \in \ell_N^2$ é aproximada pela função $w : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela equação (3.21). Esta equação pode ser representada matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cot \frac{h}{2} & -\cot \frac{2h}{2} & \cdots & -\cot \frac{h}{2} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & -\cot \frac{h}{2} & 0 & \cot \frac{h}{2} & \vdots \\ & & \ddots & & \\ \cot \frac{h}{2} & -\cot \frac{2h}{2} & \cdots & -\cot \frac{h}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

estendendo w a $h\mathbb{Z}$ pela periodicidade. Além de ser Toeplitz, como a matriz do primeiro método, esta matriz é circulante.

3.2.3 Quarto método espectral - Forma alternativa

Como na seção anterior, há uma forma alternativa para o terceiro método de derivação espectral baseado na propriedade da Transformada de Fourier da função derivada, $\widehat{u}'(k) = ik\widehat{u}(k)$ (teorema 2.1.12, item 1), que é apresentado a seguir:

Quarto Método Espectral
Dada uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -periódica, cuja discretização é $v \in \ell_N^2$:
Passo 1. Calcular a Transformada de Fourier Discreta \hat{v} por (2.8).
Passo 2. Definir $\hat{w}_v(k) = \begin{cases} ik\hat{v}(k), & \text{se } k \not\equiv N/2 \pmod{N} \\ 0, & \text{se } k \equiv N/2 \pmod{N}. \end{cases}$
Passo 3. Calcular w_v a partir de \hat{w}_v por (2.9).

No passo 2, quando multiplicado por ik , a função perde a periodicidade nos extremos do intervalo considerado, por isso é necessário zerar os extremos para equilibrar o valor da função nestas frequências.

A seguir, o quarto método espectral é aplicado às funções δ^m :

Passo 1. Já calculado em (3.14):

$$\hat{\delta}^m(k) = he^{-ikx_m}.$$

Passo 2. Definir

$$\hat{w}_{\delta^m}(k) = \begin{cases} ik\hat{\delta}^m(k) = ikhe^{-ikx_m}, & \text{se } k \not\equiv N/2 \pmod{N} \\ 0, & \text{se } k \equiv N/2 \pmod{N}. \end{cases}$$

Passo 3. Calcular, por (2.9),

$$w_{\delta^m}(x_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} ik\hat{\delta}^m(k)e^{ikx_j} = \frac{ih}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} ke^{ikh(j-m)}.$$

No caso em que $j \equiv m \pmod{N}$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $j - m = cN = c\frac{2\pi}{h}$, pela equação (2.7). Logo $e^{ikh(j-m)} = e^{ikhc\frac{2\pi}{h}} = e^{i2\pi kc} = 1$. Assim,

$$w_{\delta^m}(x_j) = \frac{ih}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} k = 0, \quad \text{se } j \equiv m \pmod{N}. \quad (3.23)$$

Se $j \not\equiv m \pmod{N}$, tem-se $e^{ikh(j-m)} \neq 1$. Neste caso,

$$\begin{aligned} w_{\delta m}(x_j) &= \frac{ih}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} k (e^{ih(j-m)})^k \\ &= \frac{ih}{2\pi} \left[\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{-1} k (e^{ih(j-m)})^k + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} k (e^{ih(j-m)})^k \right]. \end{aligned}$$

Fazendo $l = -k$ no primeiro somatório e usando (2.7) no coeficiente em evidência,

$$w_{\delta m}(x_j) = \frac{i}{N} \left[- \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} l (e^{-ih(j-m)})^l + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} k (e^{ih(j-m)})^k \right]. \quad (3.24)$$

Aplicando a fórmula

$$\sum_{k=1}^n ka^k = \frac{a[1 - (n+1)a^n + na^{n+1}]}{(1-a)^2},$$

da página 4 do apêndice B do livro [2], com $a = e^{\pm ih(j-m)}$ e $n = \frac{N}{2} - 1$, obtem-se

$$\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} k (e^{\pm ih(j-m)})^k = \frac{e^{\pm ih(j-m)} \left[1 - \frac{N}{2} e^{\pm ih(j-m)(\frac{N}{2}-1)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right) e^{\pm ih(j-m)\frac{N}{2}} \right]}{(1 - e^{\pm ih(j-m)})^2}.$$

Usando (2.7) e a identidade $e^{\pm i\pi} = -1$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} k (e^{\pm ih(j-m)})^k \\ &= \frac{e^{\pm ih(j-m)} \left[1 - \frac{N}{2} (e^{\pm i\pi(j-m)} e^{\mp ih(j-m)}) + \left(\frac{N}{2} - 1\right) e^{\pm i\pi(j-m)} \right]}{(1 - e^{\pm ih(j-m)})^2} \\ &= \frac{e^{\pm ih(j-m)} \left[1 - \frac{N}{2} (-1)^{(j-m)} e^{\mp ih(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right) (-1)^{(j-m)} \right]}{(1 - e^{\pm ih(j-m)})^2} \\ &= \frac{e^{\pm ih(j-m)} - \frac{N}{2} (-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right) (-1)^{(j-m)} e^{\pm ih(j-m)}}{(1 - e^{\pm ih(j-m)})^2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.24), obtem-se

$$w_{\delta m}(x_j) = \frac{i}{N} \left[-\frac{e^{-ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{-ih(j-m)}}{(1 - e^{-ih(j-m)})^2} + \frac{e^{ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{ih(j-m)}}{(1 - e^{ih(j-m)})^2} \right].$$

Somando as frações,

$$w_{\delta m}(x_j) = \frac{i}{N} \left[-\frac{(1 - e^{ih(j-m)})^2 (e^{-ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{-ih(j-m)})}{(1 - e^{ih(j-m)})^2 (1 - e^{-ih(j-m)})^2} + \frac{(1 - e^{-ih(j-m)})^2 (e^{ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{ih(j-m)})}{(1 - e^{-ih(j-m)})^2 (1 - e^{ih(j-m)})^2} \right]. \quad (3.25)$$

Calculando o produto nos numeradores:

$$\begin{aligned} & (1 - e^{\mp ih(j-m)})^2 \cdot \left(e^{\pm ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{\pm ih(j-m)} \right) \\ &= (1 - 2e^{\mp ih(j-m)} + e^{\mp 2ih(j-m)}) \\ & \quad \cdot \left(e^{\pm ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{\pm ih(j-m)} \right) \\ &= \left(e^{\pm ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{\pm ih(j-m)} \right) + \\ & \quad (-2 + N(-1)^{(j-m)}e^{\mp ih(j-m)} - (N-2)(-1)^{(j-m)}) + \\ & \quad \left(e^{\mp ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)}e^{\mp 2ih(j-m)} + \left(\frac{N}{2} - 1\right)(-1)^{(j-m)}e^{\mp ih(j-m)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (e^{\pm ih(j-m)} + e^{\mp ih(j-m)}) + \left(\frac{N-2}{2}\right) (-1)^{(j-m)} (e^{\pm ih(j-m)} + e^{\mp ih(j-m)}) \\
&\quad - \left(\frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + 2 + (N-2)(-1)^{(j-m)}\right) \\
&\quad + (-1)^{(j-m)} \left(Ne^{\mp ih(j-m)} - \frac{N}{2}e^{\mp 2ih(j-m)}\right) \\
&= 2 \cos(h(j-m)) + (N-2)(-1)^{(j-m)} \cos(h(j-m)) \\
&\quad - \left(\frac{N}{2}(-1)^{(j-m)} + 2 + (N-2)(-1)^{(j-m)}\right) \\
&\quad + N(-1)^{(j-m)} \left(e^{\mp ih(j-m)} - \frac{1}{2}e^{\mp 2ih(j-m)}\right).
\end{aligned}$$

Nota-se que apenas a última linha acima tem o sinal \mp , portanto, ao substituir em (3.25), é a única que não se cancela:

$$\begin{aligned}
w_{\delta^m}(x_j) &= \frac{i}{N} \left[\frac{-\left(N(-1)^{(j-m)}e^{ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)}e^{2ih(j-m)}\right)}{\left((1 - e^{-ih(j-m)})(1 - e^{ih(j-m)})\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(N(-1)^{(j-m)}e^{-ih(j-m)} - \frac{N}{2}(-1)^{(j-m)}e^{-2ih(j-m)}\right)}{\left((1 - e^{-ih(j-m)})(1 - e^{ih(j-m)})\right)^2} \right] \\
&= \frac{i}{N} \left[\frac{N(-1)^{(j-m)}(-e^{ih(j-m)} + e^{-ih(j-m)})}{(1 - e^{-ih(j-m)} - e^{ih(j-m)} + 1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{N}{2}(-1)^{(j-m)}(e^{2ih(j-m)} - e^{-2ih(j-m)})}{(1 - e^{-ih(j-m)} - e^{ih(j-m)} + 1)^2} \right] \\
&= i(-1)^{(j-m)} \left[\frac{-2i \sin(h(j-m)) + i \sin(2h(j-m))}{(2 - 2 \cos(h(j-m)))^2} \right] \\
&= (-1)^{(j-m)} \left[\frac{2 \sin(h(j-m)) - 2 \sin(h(j-m)) \cos(h(j-m))}{4(1 - \cos(h(j-m)))^2} \right] \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{(j-m)} \frac{\sin(h(j-m))(1 - \cos(h(j-m)))}{(1 - \cos(h(j-m)))^2} \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{(j-m)} \frac{\sin(h(j-m))}{1 - \cos(h(j-m))} \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{(j-m)} \frac{2 \sin\left(\frac{h(j-m)}{2}\right) \cos\left(\frac{h(j-m)}{2}\right)}{1 - \cos^2\left(\frac{h(j-m)}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{h(j-m)}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-1)^{(j-m)} \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{h(j-m)}{2} \right) \cos \left(\frac{h(j-m)}{2} \right)}{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{h(j-m)}{2} \right)} \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{(j-m)} \frac{\cos \left(\frac{h(j-m)}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{h(j-m)}{2} \right)} \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{(j-m)} \cot \left(\frac{h(j-m)}{2} \right), \quad \text{se } j \not\equiv m \pmod{N}.
\end{aligned}$$

Que é o mesmo resultado obtido em (3.17).

Agora, usando os resultados obtidos para as funções δ^m , pode-se aplicar o quarto método espectral para uma função $v \in \ell_N^2$ qualquer.

Passo 1. Já calculado em (3.18):

$$\hat{v}(k) = \sum_{m=1}^N v_m \hat{\delta}^m(k).$$

Passo 2. Definir

$$\hat{w}_v(k) = \begin{cases} \sum_{m=1}^N v_m i k \hat{\delta}^m(k), & \text{se } k \not\equiv N/2 \pmod{N} \\ 0, & \text{se } k \equiv N/2 \pmod{N}. \end{cases}$$

Passo 3. Calcular, por (2.9) e usando os resultados encontrados para as funções δ^m ,

$$\begin{aligned}
w_v(x_j) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} \hat{w}_v(k) e^{ikx_j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} \left(\sum_{m=1}^N v_m i k \hat{\delta}^m(k) \right) e^{ikx_j} \\
&= \sum_{m=1}^N v_m \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} i k \hat{\delta}^m(k) e^{ikx_j} \right) = \sum_{m=1}^N v_m w_{\delta^m}(x_j).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$w_v(x_j) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \not\equiv j \pmod{N}}}^N v_m \frac{1}{2} (-1)^{j-m} \cot \left(\frac{(j-m)h}{2} \right). \quad (3.26)$$

Apesar dos caminhos do terceiro e quarto métodos serem diferentes, o resultado obtido em (3.21) é o mesmo que em (3.26). Neste sentido, os dois métodos são equivalentes.

Tanto na seção anterior como nesta, os caminhos distintos dos métodos espectrais, derivando no domínio físico ou no domínio das frequências, na teoria são equivalentes. Mas, na prática, ainda ficam as dúvidas: será que na implementação tem alguma diferença? A convergência é a mesma? E sobre a precisão espectral do terceiro e quarto métodos, é comparável com os dois primeiros? Este assunto será abordado parcialmente no próximo capítulo.

Capítulo 4

Testes em MATLAB

Apresentados os quatro métodos espectrais de derivação no capítulo 3, agora é o momento de testá-los e compará-los computacionalmente. As funções escolhidas para os experimentos são aquelas utilizadas no capítulo 3 para ilustrar os métodos espectrais: função gaussiana, as funções sinc e as sinc periódicas. Todos os códigos de MATLAB utilizados neste capítulo estão listados no apêndice B.

É bom destacar que as comparações deste capítulo são baseadas nos pontos de uma malha, apesar do primeiro e do terceiro métodos passarem por um interpolador.

4.1 Estudo da Gaussiana e Testes de Precisão

A aplicação do método spectral à função gaussiana foi ilustrada na figura 3.1. Os códigos destas figuras estão no apêndice A. Os objetivos desta seção são aprofundar o estudo da função gaussiana, esclarecer os detalhes sobre a figura 3.1 e fazer alguns testes de convergência das Transformadas de Fourier Semidiscreta e Discreta e dos métodos espectrais com a função gaussiana.

A primeira linha da figura 3.1 é composta respectivamente pelas gaussianas $u(x) = e^{-x^2}$ e $\hat{u}(k) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$ ($\hat{u}(k)$ foi calculada no exemplo 2.1.9).

Na segunda linha tem-se a discretização da gaussiana, $v_j = e^{-x_j^2}$, e a sua Transformada de Fourier Semidiscreta, cujo gráfico está repetido de forma ampliada na figura 4.1.

Este gráfico não é o truncamento de uma função gaussiana, como pode

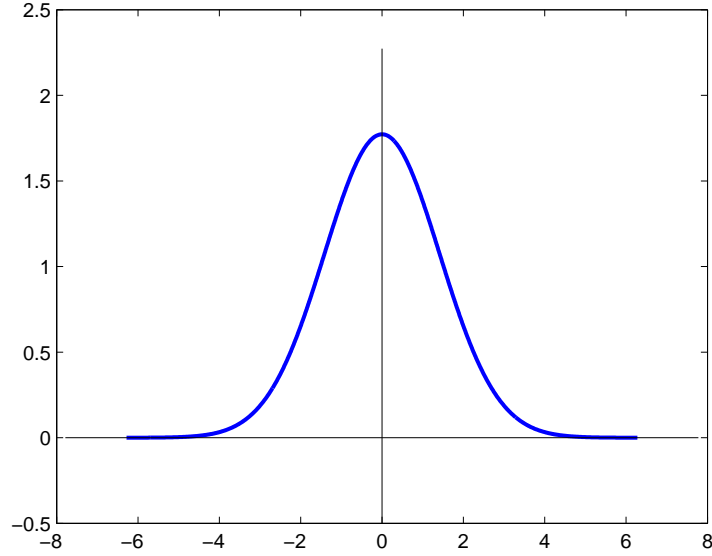


Figura 4.1: Ampliação do gráfico da linha 2 e coluna 2 da figura 3.1.

parecer à primeira vista. Isso pode ser observado pela fórmula de aliasing:

$$\begin{aligned}\hat{v}(k) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{u}\left(k + \frac{2\pi}{h}j\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}(k+2\pi j/h)^2} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2}{h^2}j^2 - \frac{\pi k}{h}j}, \\ \hat{v}(k) &= \hat{u}(k) \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2}{h^2}j^2 - \frac{\pi k}{h}j}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Como \hat{u} é uma gaussiana, quando multiplicada pelo somatório, fica levemente perturbada. O somatório em (4.1) é uma função theta de Jacobi, que é definida, na página 272 de [15], por

$$\Theta(z, \lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \lambda j^2 + 2ijz},$$

para $z = \frac{k\pi i}{2h}$ e $\lambda = \frac{\pi}{h^2} > 0$, com $h > 0$ fixo. Ou seja,

$$\hat{v}(k) = \hat{u}(k) \Theta\left(\frac{k\pi i}{2h}, \frac{\pi}{h^2}\right).$$

Por outro lado, pode-se usar a própria definição da Transformada de

Fourier Semidiscreta (2.4) para comparar com a função theta de Jacobi. De fato, de

$$\hat{v}(k) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j e^{-ikx_j} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-x_j^2} e^{-ikx_j} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-h^2 j^2 - ijk h}, \quad (4.2)$$

segue que, para $z = -\frac{kh}{2}$ e $\lambda = \frac{h^2}{\pi} > 0$, com $h > 0$ fixo,

$$\hat{v}(k) = h \Theta \left(-\frac{kh}{2}, \frac{h^2}{\pi} \right).$$

Portanto, a Transformada de Fourier Semidiscreta da gaussiana é uma função theta de Jacobi e vale a chamada identidade de Jacobi ([15], p. 272):

$$\hat{v}(k) = h \Theta \left(-\frac{kh}{2}, \frac{h^2}{\pi} \right) = \hat{u}(k) \Theta \left(\frac{k\pi i}{2h}, \frac{\pi}{h^2} \right).$$

Estas duas maneiras de escrever a função \hat{v} , via fórmula de alising e via definição, deixam a pergunta: qual converge mais rapidamente?

Para tentar responder esta questão e escolher uma das fórmulas para implementação, são comparados os termos dos somatórios das equações (4.1) e (4.2), denotados por

$$a_j = e^{-\frac{\pi^2}{h^2} j^2 - \frac{\pi k}{h} j} \quad (4.3)$$

e

$$b_j = e^{-h^2 j^2 - ijk h}. \quad (4.4)$$

Os decaimentos relativos entre dois termos consecutivos são

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = e^{-\frac{\pi k}{h}} e^{-\frac{\pi^2}{h^2} (2j+1)}, \text{ se } j > 0, \quad \text{e} \quad \frac{a_j}{a_{j+1}} = e^{\frac{\pi k}{h}} e^{\frac{\pi^2}{h^2} (2j+1)}, \text{ se } j < 0, \quad (4.5)$$

e

$$\left| \frac{b_{j+1}}{b_j} \right| = e^{-h^2 (2j+1)}, \text{ se } j > 0, \quad \text{e} \quad \left| \frac{b_j}{b_{j+1}} \right| = e^{h^2 (2j+1)}, \text{ se } j < 0. \quad (4.6)$$

A figura 4.2 é uma comparação, para h fixado, entre as expressões acima. O valor de k escolhido para avaliar (4.5) ($j > 0$) foi o valor de máximo de $\frac{a_{j+1}}{a_j}$, a saber: $k = -\frac{\pi}{h}$.

Verifica-se que a fórmula de aliasing converge muito mais rapidamente. Por exemplo, o valor do primeiro quociente foi $\frac{a_2}{a_1} = 0.31413990845193e-190$.

Há ainda mais uma vantagem da fórmula de aliasing. Até agora as comparações foram feitas com h fixo. Mas, por outro lado, quando $h \rightarrow 0$, fixando

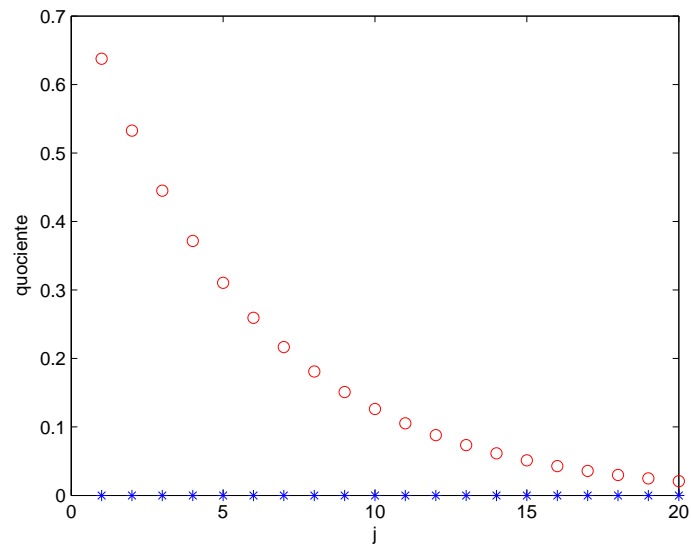


Figura 4.2: Aproximação da função theta de Jacobi. Em azul (*) via fórmula de aliasing, quociente (4.5), e em vermelho (o) via definição, quociente (4.6).

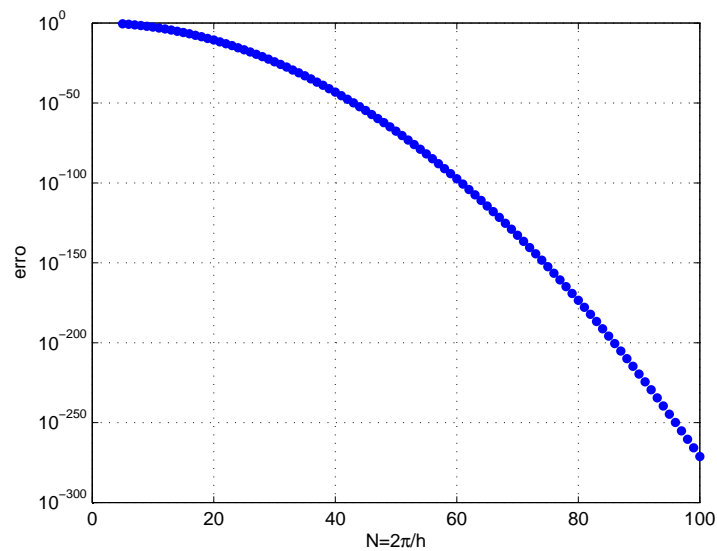


Figura 4.3: Convergência de \hat{v} para \hat{u} , quando $h \rightarrow 0$, via fórmula de aliasing.

agora o índice j , os termos (4.3) tendem a zero, enquanto que os termos (4.4) tendem a um. Isto sugere que a convergência de \hat{v} para \hat{u} quando $h \rightarrow 0$ é também mais rápida pela fórmula de aliasing. A figura 4.3 mostra o resultado via fórmula de aliasing, onde o erro máximo do valor absoluto está em escala logarítmica.

Verifica-se também, para a função gaussiana (que pode ser estendida analiticamente a uma faixa que contém a reta real), o que foi previsto pelo item 3 do teorema 2.2.10, ou seja, que o decaimento da diferença entre \hat{v} e \hat{u} , quando $h \rightarrow 0$, é exponencial. Portanto, para fazer o gráfico da segunda linha e segunda coluna da figura 3.1, foi escolhida a fórmula de aliasing.

A desvantagem da fórmula de aliasing é que é preciso conhecer previamente a Transformada de Fourier da função, o que pode ser complicado para algumas funções. No caso da gaussiana isto não é problema, uma vez que sua Transformada foi calculada no exemplo 2.1.9.

Passando para a terceira linha da figura 3.1, na segunda coluna, como estabelece o primeiro método espectral, repete-se o gráfico de \hat{v} e estende-se à reta toda zerando fora do intervalo $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$. A primeira coluna é o interpolador de u , que foi programado com base na fórmula (3.9), com truncamento simétrico do somatório.

Os próximos experimentos desta seção são com domínio truncado no intervalo $[-\pi, \pi]$.

A figura 4.4 compara os erros, quando $h \rightarrow 0$ ($N \rightarrow +\infty$), nos pontos da malha, dos interpoladores definidos pelo primeiro e pelo terceiro métodos espectrais, para a função gaussiana $u(x) = e^{-x^2}$. O primeiro método foi implementado pela fórmula (3.9), com truncamento simétrico do somatório, e o terceiro método foi implementado utilizando os comandos `fft` e `ifft` do MATLAB.

Na teoria, a fórmula (3.9) coincide com a função na malha, como mostrado na observação 3.1.6. Porém, há erros de arredondamento na compilação. A figura 4.4 mostra que, para valores pequenos de $N = \frac{2\pi}{h}$, o interpolador gerado pela fórmula (3.9) é o que melhor aproxima a função gaussiana nos pontos da malha. Mas, para valores maiores de N , quando aparecem mais termos da forma

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(x_j - x_m)\right)}{\frac{\pi}{h}(x_j - x_m)}$$

da fórmula (3.9), os erros de arredondamento se acumulam e a aproximação via FFT passa a ser melhor, apesar de também perder um pouco de precisão a partir de aproximadamente $N = 60$.

Observação 4.1.1. Métodos espectrais geralmente têm bons resultados com

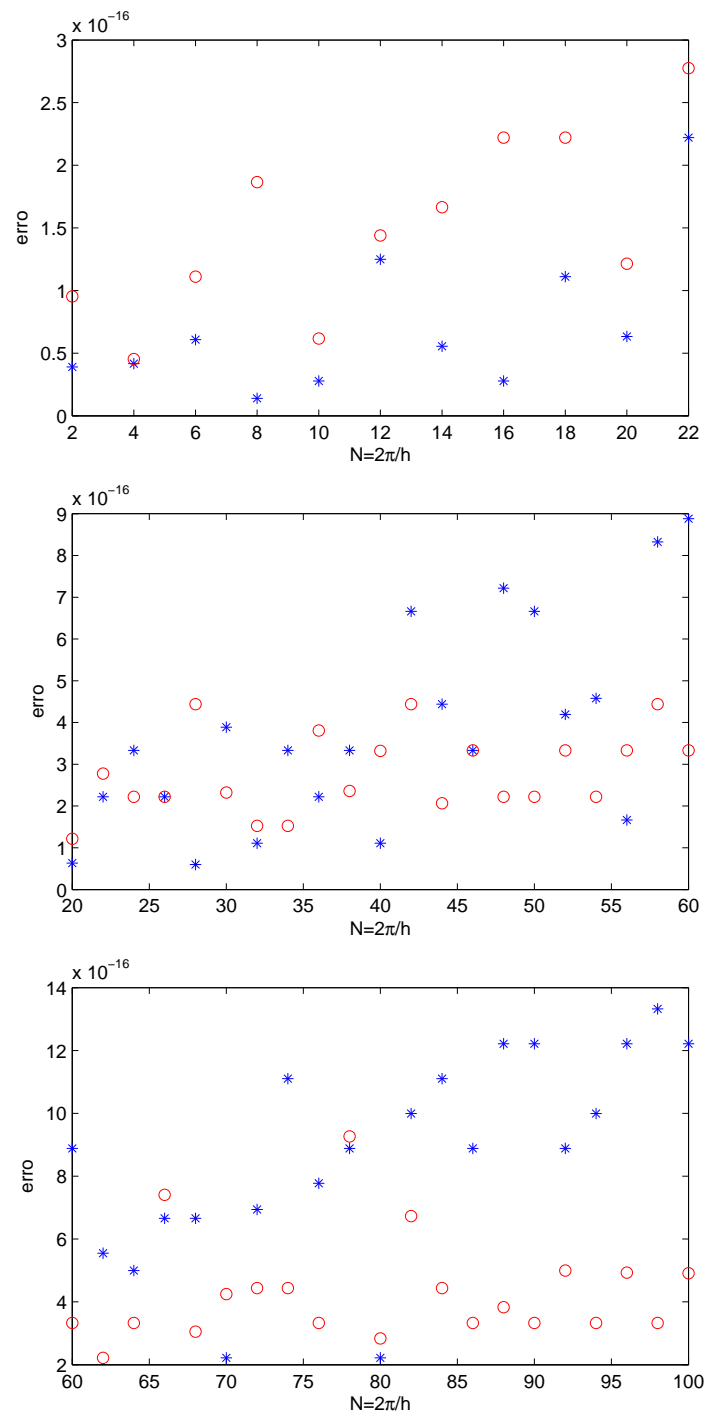


Figura 4.4: Erros dos métodos ao aproximar a função gaussiana. Em azul (*) o primeiro método e em vermelho (o) o terceiro método via FFT.

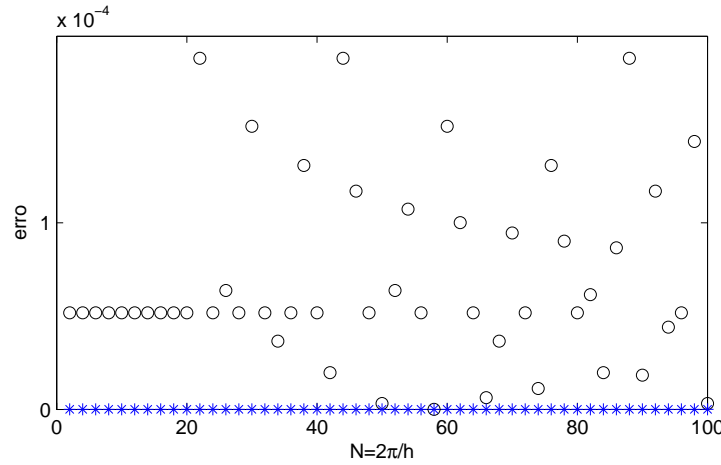


Figura 4.5: Erros dos métodos ao aproximar a função gaussiana. Em azul (*) o primeiro método e em vermelho (o) o terceiro método via (3.19).

valores pequenos de N . ◇

Ainda sobre o interpolador, a figura 4.5 faz uma comparação entre a convergência, com h tendendo a zero, do interpolador gerado pelo primeiro método, novamente truncando a fórmula (3.9), com o interpolador gerado pelo terceiro método, mas agora pela fórmula (3.19) ao invés de usar o comando `fft`. Como a fórmula do interpolador do primeiro método precisa ser truncada, os dois casos usam os mesmos dados para o cálculo. Porém, há uma diferença entre as duas fórmulas: uma com a sinc e a outra com a sinc periódica. Verifica-se que o interpolador periódico não tem a mesma precisão: como visto na figura 4.4, o erro do interpolador gerado pelo primeiro método é da ordem de 10^{-16} ou 10^{-15} , enquanto que o erro do interpolador gerado pelo terceiro método é da ordem de 10^{-5} ou 10^{-4} .

Finalmente, a última linha da figura 3.1 é composta, na primeira coluna, pela derivada do interpolador, implementada com base na fórmula (3.11). E na segunda coluna, pela derivação no domínio das frequências, como estabelece o passo 2 do segundo método espectral, onde o gráfico é da parte imaginária da função.

Na teoria, estes dois caminhos de se fazer a derivação espectral são equivalentes, tanto no contexto semidiscreto como no discreto (demonstrado no capítulo anterior). Mas, na prática, existe alguma diferença na convergência dos métodos, quando h tende a zero?

Para tentar responder, foi implementado o primeiro método com base na

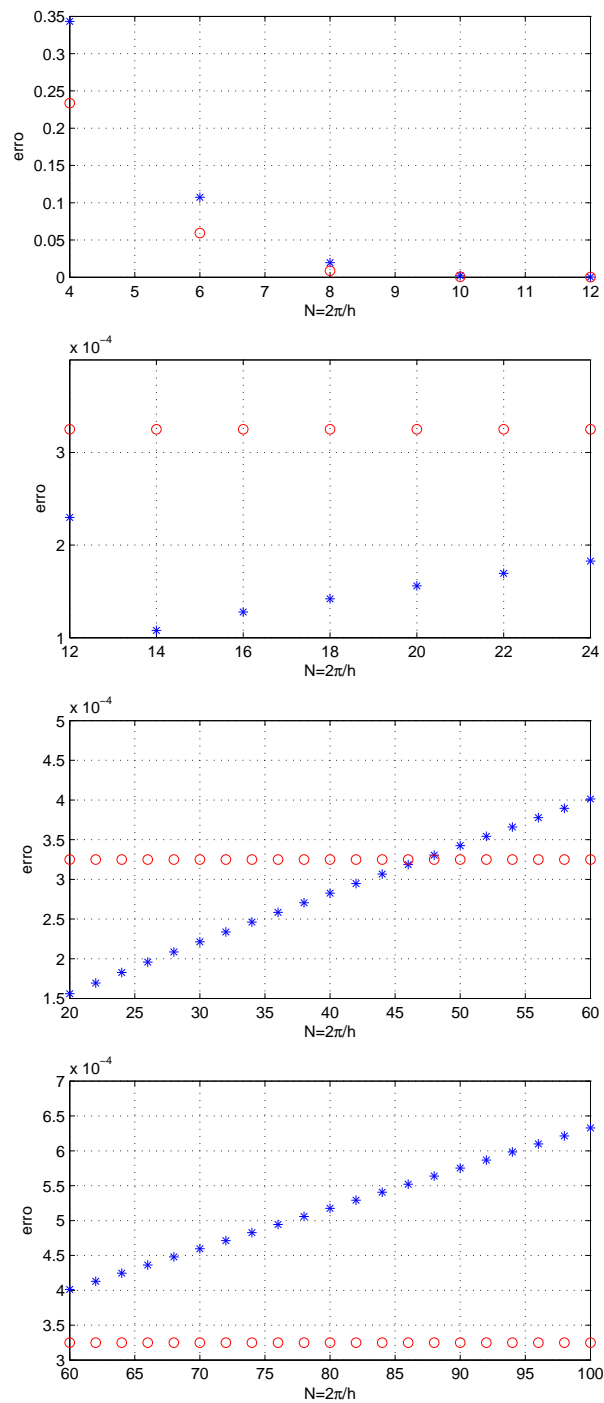


Figura 4.6: Erros dos métodos ao aproximar a derivada da gaussiana. Em azul (*) o primeiro método e em vermelho (o) o quarto método.

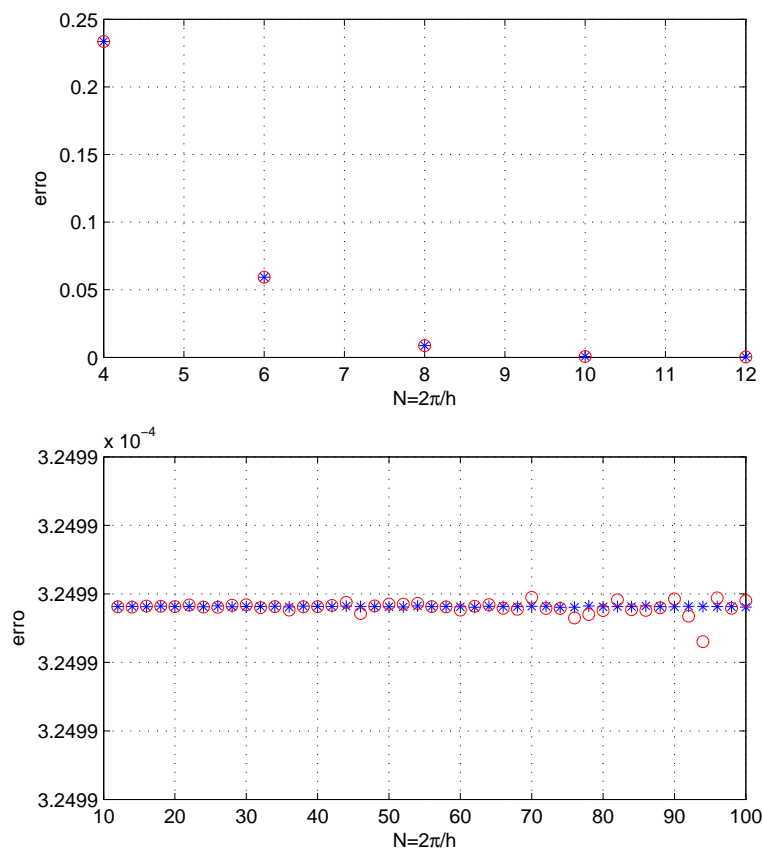


Figura 4.7: Erros dos métodos ao aproximar a derivada da gaussiana. Em azul (*) o terceiro método e em vermelho (o) o quarto método.

fórmula (3.11) e o quarto método com os comandos `fft` e `ifft`. Cada resultado foi comparado com a derivada exata da gaussiana, $u'(x) = -2xe^{-x^2}$, o que originou a figura 4.6.

Ficou claro que, para valores grandes de $N = \frac{2\pi}{h}$ (N par), o primeiro método perde eficiência por causa do acúmulo de erros de arredondamento e truncamento; o erro aumenta de forma linear. Porém, tendo em vista a observação 4.1.1, fica mais difícil decidir qual é o melhor método. Para $4 \leq N \leq 10$, o quarto método foi melhor, mas para $12 \leq N \leq 46$ o primeiro método foi melhor, quando permanece aproximadamente constante.

Ainda resta uma pergunta: será que a implementação da fórmula (3.21), encontrada na teoria pelo terceiro e quarto métodos, teria uma convergência distinta da obtida via FFT? A figura 4.7 faz esta comparação. Vê-se que, para a função gaussiana, não houve diferença significativa.

Observação 4.1.2. A ordem de precisão de 10^{-4} ainda não é a esperada para métodos espectrais de derivação. Para funções periódicas com certa ordem de diferenciabilidade, estes métodos podem atingir facilmente precisão entre 10^{-10} e 10^{-16} . Mais adiante serão vistas técnicas para melhorar um pouco estes resultados.

◇

4.2 Estudo da Sinc e Sinc Periódica

As figuras 3.2 e 3.3 ilustram a aplicação dos métodos espectrais de derivação às funções delta e delta periódica, cujos interpoladores são as funções sinc e sinc periódica, respectivamente. Os códigos destas figuras estão no apêndice A. Os objetivos desta seção são aprofundar o estudo das funções sinc e sinc periódicas e fazer alguns testes de convergência dos métodos espectrais com estas funções.

Nesta seção, tanto as funções 2π -periódicas como as não periódicas são restritas ao intervalo $[-\pi, \pi]$ (em alguns casos, o extremo esquerdo $-\pi$ é desconsiderado). As funções não periódicas são simplesmente truncadas neste intervalo.

Qual é a diferença entre a sinc e a sinc periódica no intervalo $[-\pi, \pi]$? Para responder esta pergunta, foi feita a figura 4.8. Lembrando que, para $h > 0$ fixo, a função sinc (equação (3.4) com $m = 0$) considerada agora é

$$S_h(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{h}x)}{\frac{\pi}{h}x}, & \text{se } x \in [-\pi, \pi] - \{0\} \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

e, para $N = \frac{2\pi}{h}$ par, a sinc periódica (equação (3.15) com $m = 0$) considerada agora é

$$S_N(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{h}x)}{2\frac{\pi}{h}\tan(\frac{x}{2})}, & \text{se } x \in [-\pi, \pi] - \{0\} \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

A segunda coluna da figura 4.8 sugere outra pergunta: as diferenças pontuais entre as funções sinc e sinc periódicas convergem a zero quando $h \rightarrow 0$? A resposta é afirmativa. De fato, para $x = 0$ a diferença é zero para qualquer

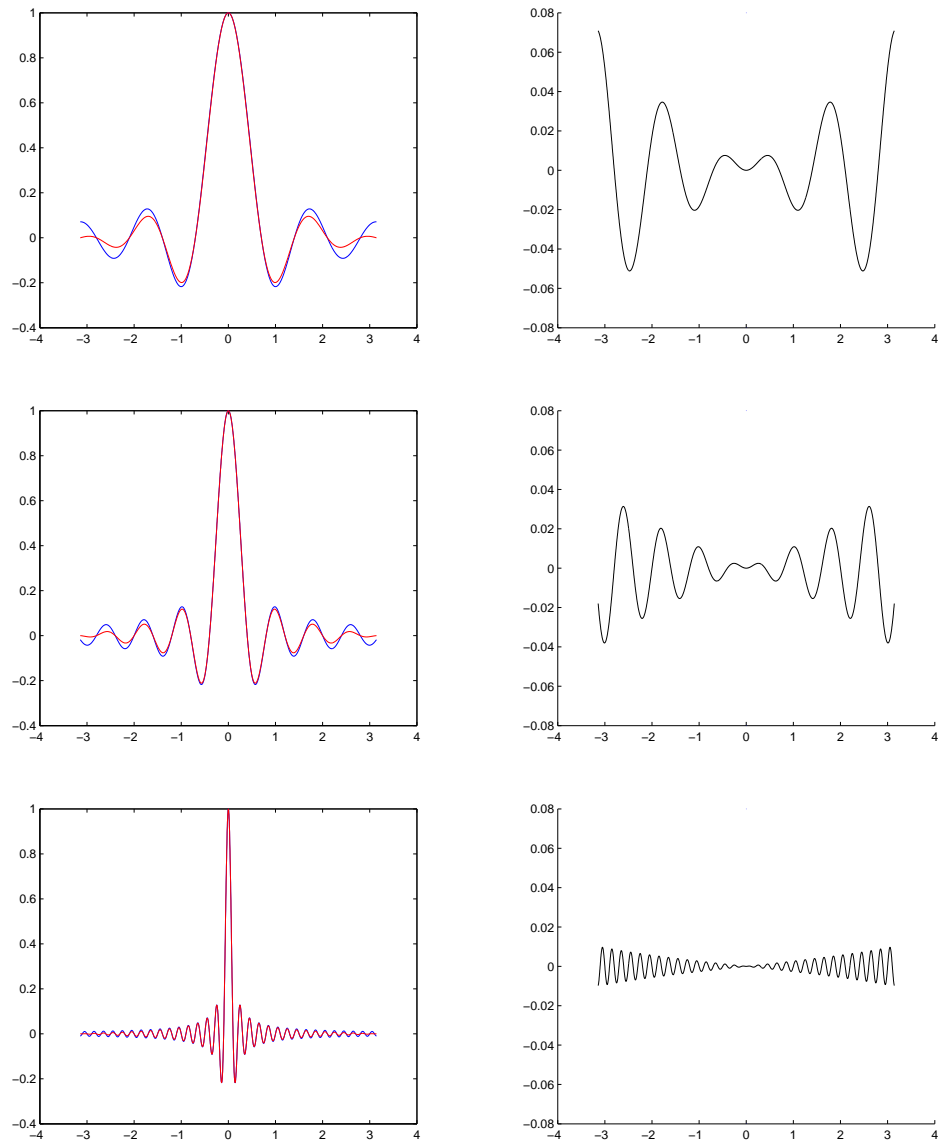


Figura 4.8: Coluna 1: S_h em azul e S_N em vermelho, para $h = 0.7$, $h = 0.4$ e $h = 0.1$. Coluna 2: diferença pontual das funções da coluna 1.

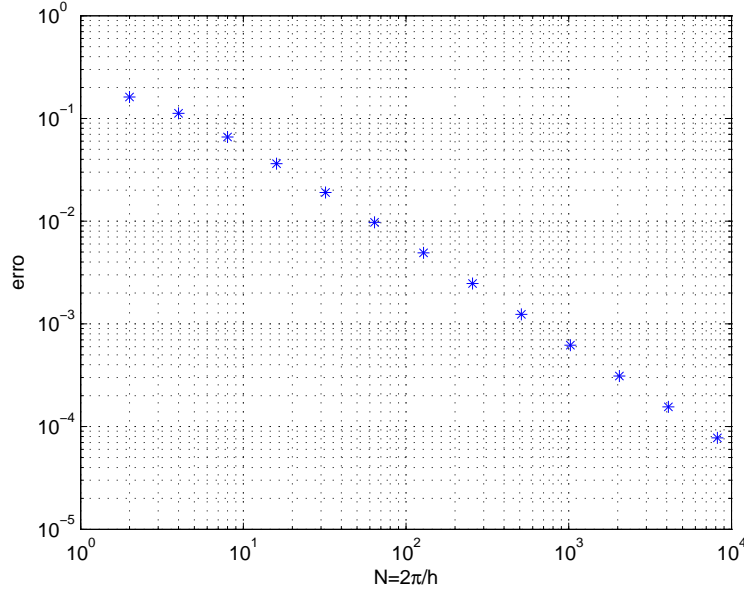


Figura 4.9: Diferença máxima absoluta entre S_h e S_N .

$h > 0$ e, para $x \neq 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |S_h(x) - S_N(x)| = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{\pi} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}x\right)}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}x\right)}{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = 0,$$

pois o limite é do produto de uma função que tende a zero por uma função limitada em h . A taxa de convergência é atestada pela figura 4.9 (em escala logarítmica).

Pode-se reinterpretar esta convergência da seguinte maneira. Seja S_h uma função sinc, com $h = \frac{2\pi}{N}$ e N par, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$. A discretização de S_h na malha $h\mathbb{Z} \cap (-\pi, \pi]$ é

$$S_h(x_j) = \delta^0(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 0 \\ 0, & \text{se } j \neq 0, \end{cases}$$

para $-N/2+1 \leq j \leq N/2$. Como visto na seção 3.2.1, o interpolador definido pelo terceiro método espectral para a função delta δ^0 é a função sinc periódica S_N em $[-\pi, \pi]$ (vide (3.15)). Portanto, quando a largura da malha uniforme é a mesma que o índice h da definição da sinc, a função sinc periódica S_N interpola a função sinc S_h com a precisão mostrada na figura 4.9 (em escala

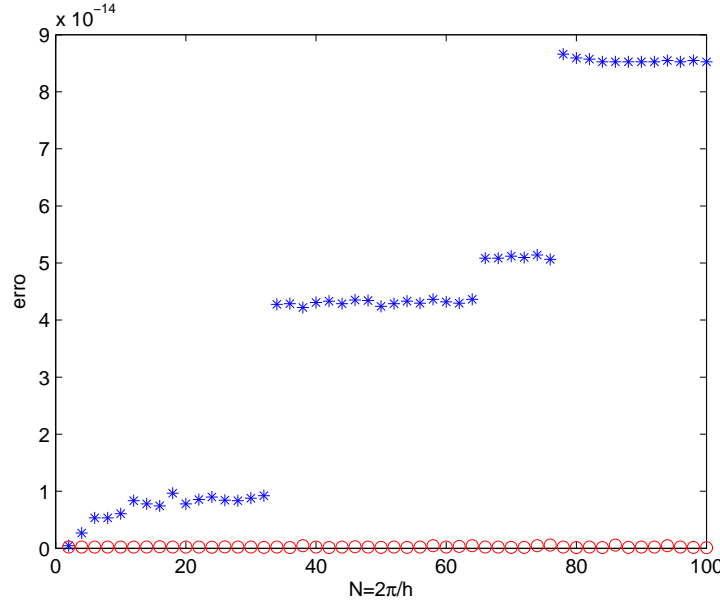


Figura 4.10: Erros da aproximação de S_h via fórmula (3.9) em azul (*) e via FFT em vermelho (o).

logarítmica).

Por outro lado, mantendo $h = \frac{2\pi}{N}$ fixado, a função sinc S_h discretizada por uma nova malha $h_2\mathbb{Z} \cap (-\pi, \pi]$, onde $h_2 < h$ ($h_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ com N_2 par), não assume apenas os valores 1 e 0's como antes (não é a função δ^0 na malha $h_2\mathbb{Z} \cap (-\pi, \pi]$). Portanto, não pode-se usar os resultados da seção 3.2.1. O que pode ser testado neste caso é o erro, com relação à própria função sinc S_h , gerado pela aplicação dos comandos `fft` e em seguida `ifft` nos valores de S_h na nova malha. O mesmo pode ser feito através do truncamento da fórmula (3.9). A figura 4.10 mostra estes erros para vários valores de $h = \frac{2\pi}{N}$, sempre com o refinamento $h_2 = \frac{h}{10}$. Tem-se uma excelente aproximação de S_h com o comando `fft`, os erros estão todos na ordem de 10^{-16} , bem menores que os resultados obtidos na figura 4.9. A aproximação pela fórmula (3.9) também foi boa, mas ela perde precisão à medida que os erros de arredondamento se acumulam.

Passando para a derivada da sinc, pode-se tentar aproximar S'_h aplicando o quarto método espectral à função S_h com o comando `fft`, resultando numa função que será denotada por w_{S_h} . O mesmo pode ser feito aplicando o primeiro método com o truncamento da fórmula 3.11. Estes testes foram

feitos para N par de 2 até 100, ou seja, para vários valores de $h = \frac{2\pi}{N}$, e com refinamento da malha $h_2 = \frac{h}{10}$. O erro absoluto máximo foi calculado comparando com a expressão exata:

$$S'_h(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\frac{\pi}{h}x) - S_h(x)}{x}, & \text{se } x \in [-\pi, \pi] - \{0\} \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

(vide equação (3.6)). Os resultados foram aproximadamente constantes. Para o quarto método eles oscilaram entre

$$0.31830988618378 \quad \text{e} \quad 0.31830988618380, \quad (4.10)$$

e para o primeiro método eles oscilaram entre

$$0.14719466985774 \quad \text{e} \quad 0.15891422822430. \quad (4.11)$$

O primeiro método foi um pouco melhor, mas a verdade é que os dois estão ruins. Na discussão que segue, as atenções estarão concentradas no quarto método espectral. Na tentativa de entender por que o erro máximo é grande e não diminui quando h diminui, foi usado o mesmo programa para plotar os gráficos das funções S'_h e w_{S_h} , com $h = 0.45$ fixado e a malha definida por $h_2 = \frac{\pi}{150}$, na figura 4.11. A diferença entre estas duas funções foi plotada na terceira linha da figura 4.12.

As duas primeiras linhas da figura 4.12 são as diferenças entre S'_h e w_{S_h} com $h = 0.45$, mas com a malha definida por $h_2 = \frac{\pi}{12}$ e $h_2 = \frac{\pi}{50}$, respectivamente. Vê-se que w_{S_h} está aproximando a função S'_h , mas há um problema nos extremos do intervalo. Este problema ocorreu porque, ao fazer o truncamento desta função sinc em $[-\pi, \pi]$, o que será aproximado pela função w_{S_h} é sua extensão periódica, que não é diferenciável nas extremidades do intervalo. Neste caso, o valor da derivada S'_h é positivo por um lado e negativo pelo outro, e com o mesmo módulo. Isto faz com que o valor de w_{S_h} nos extremos do intervalo seja zero, ou seja, é a média dos valores $\lim_{x \rightarrow \pi^-} S'_h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \pi^+} S'_h(x)$ (vide [16], p. 60).

Este comportamento oscilatório perto das discontinuidades do tipo salto finito, que não se atenua com o aumento dos pontos da malha, é conhecido como fenômeno de Gibbs, vide [5].

Aqui o fenômeno de Gibbs será atenuado de uma maneira muito simples: escolhendo uma função sinc cuja derivada se anule em π (e consequentemente em $-\pi$). Em outras palavras, é preciso encontrar valores de h tais que $S'_h(\pi) = 0$. Alguns deles foram aproximados computacionalmente e, em seguida, foi aplicado o quarto método espectral via FFT na função sinc S_h

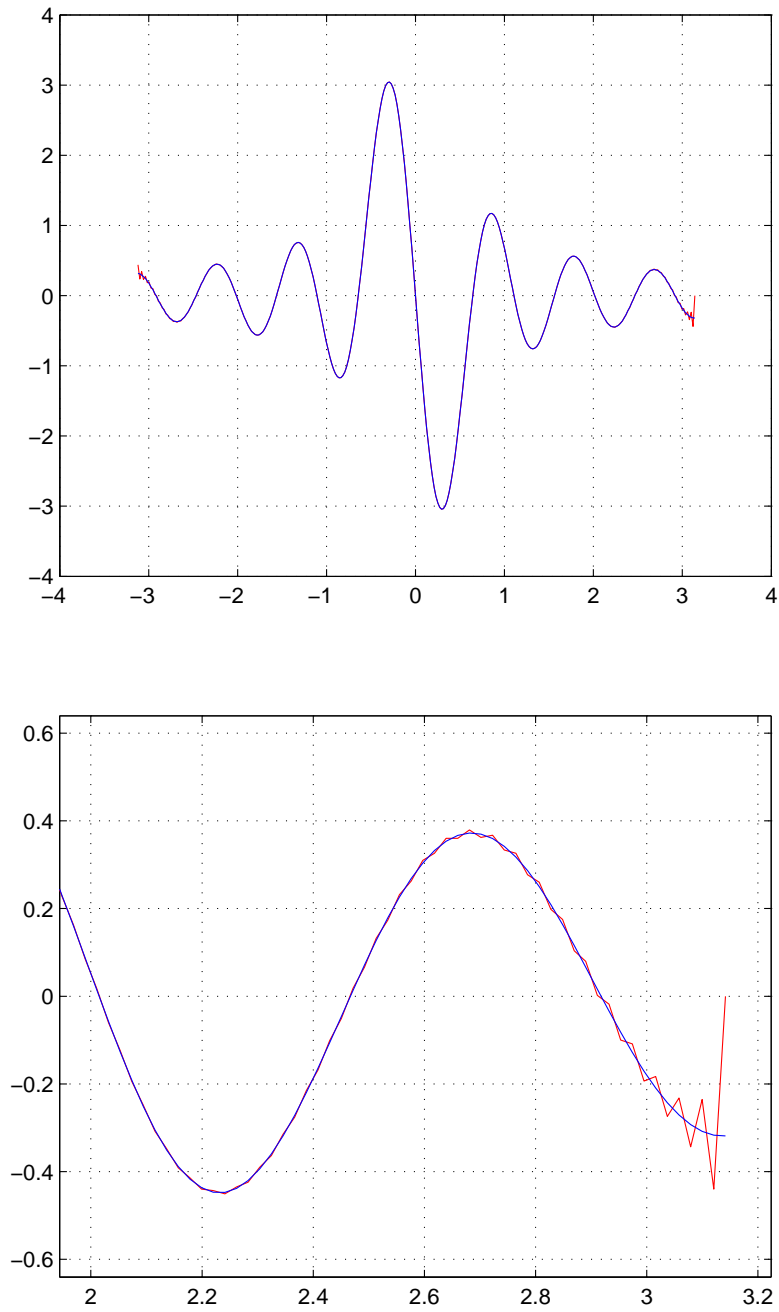


Figura 4.11: Em vermelho a função w_{S_h} e em azul a S'_h , com $h = 0.45$ e o intervalo discretizado por $h_2 = \frac{\pi}{150}$. A segunda linha é um *zoom* da primeira perto da extremidade direita.

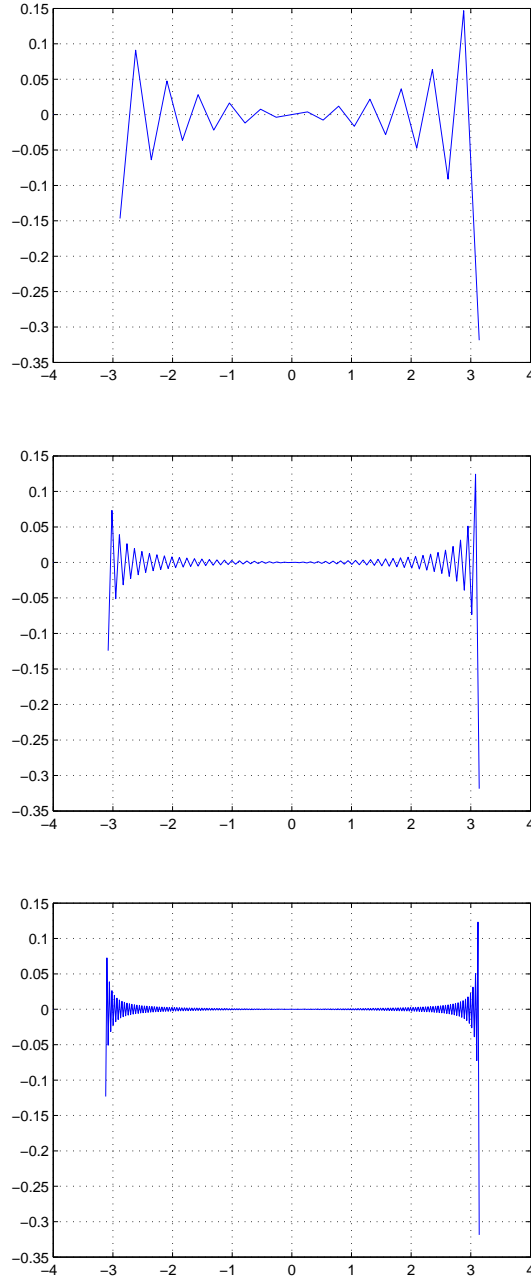


Figura 4.12: Diferença entre S'_h e w_{S_h} , com $h = 0.45$ e o intervalo discretizado por $h_2 = \frac{\pi}{12}$, $h_2 = \frac{\pi}{50}$ e $h_2 = \frac{\pi}{150}$, respectivamente.

correspondendo com o mesmo programa usado para gerar a figura 4.11, com intervalo discretizado por $h_2 = \frac{\pi}{500}$. O primeiro método também foi testado com os mesmos parâmetros. Os resultados estão listados na tabela 4.1.

h	Erro via FFT	Erro primeiro método
0.015826	0.00882810804753	0.19214114881690
0.025856	0.00426252440779	0.29738535869099
0.032221	0.00244053355257	0.36665279420139
0.063469	$1.114126802640757e - 004$	0.71279236042760
0.064777	$6.712554729239325e - 004$	0.72747896151605
0.110245	$1.924151363734719e - 005$	1.23471112323020
0.216766	$3.824993824946879e - 006$	2.42489945826996
0.331065	$2.637506830557610e - 005$	3.70163349601814
0.419635	$1.436272132234527e - 005$	4.69006867038431
0.701654	$1.437808134515581e - 006$	7.82891732400801
0.905126	$5.754427156836120e - 007$	10.08226333004208
1.277577	$4.017047127765488e - 007$	14.17235800966962

Tabela 4.1: Aplicação do quarto e primeiro métodos espectrais.

Pelo primeiro método os resultados foram péssimos. Como já constatado para a gaussiana, este método não é bom para malha com muitos pontos. Por outro lado, no caso do quarto método, o erro diminuiu bastante com relação aos valores em (4.10). No entanto, os erros obtidos para os primeiros valores de h não foram muito bons. Isto aconteceu porque a função $S'_h(\pi)$ (como função de h) oscila muito nos pontos próximos de zero (vide figura 4.13), então um pequeno arredondamento pode causar uma grande diferença no resultado. Por exemplo, ao inserir mais dígitos no primeiro valor de h da tabela 4.1, o resultado ganha precisão, conforme mostrado na tabela 4.2, enquanto que o primeiro método não teve uma melhora significativa.

h	Erro via FFT	Erro primeiro método
0.01582670394002	$3.667110052740785e - 005$	0.19036819547989

Tabela 4.2: Aplicação do quarto e primeiro métodos espectrais.

Apesar desta estratégia para atenuar o fenômeno de Gibbs ter funcionado de forma satisfatória, o escopo de funções onde ela se aplica é bastante restrito. Para as funções em que o fenômeno de Gibbs se manifesta, pode-se tentar ignorar alguns pontos próximos dos extremos do intervalo a fim de

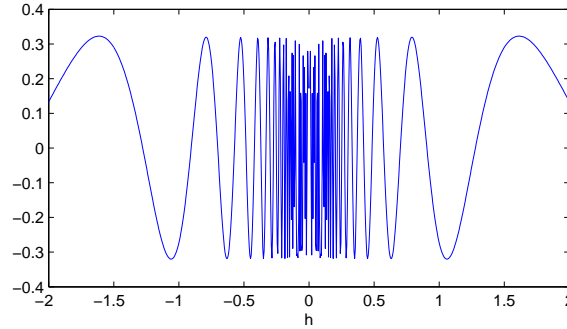


Figura 4.13: Oscilação de $S'_h(\pi)$ para h próximo de zero.

obter uma aproximação um pouco melhor. A figura 4.14 mostra o resultado desta tentativa para a função S'_h . Considerando todo o intervalo o resultado é constante por causa do fenômeno de Gibbs. Excluindo os extremos e mais alguns pontos os resultados ganharam uma ordem de precisão.

A figura 4.14 também mostra os resultados da aplicação do primeiro método espectral através da fórmula 3.10, considerando todos os pontos do intervalo e também excluindo os extremos e mais alguns pontos. Vê-se que este método teve um desempenho melhor do que via FFT.

Mesmo excluindo alguns pontos próximos ao extremo do intervalo, no caso da sinc a aproximação ainda é ruim, mas esta técnica pode ser utilizada para melhorar a ordem de precisão para outras funções. Por exemplo, o método aplicado à função gaussiana na seção anterior também manifestou o fenômeno de Gibbs, uma vez que estendida periodicamente ela não é diferenciável nos extremos do intervalo $(-\pi, \pi]$. Como a ordem de precisão obtida na figura 4.6 foi 10^{-4} , o fenômeno pode passar despercebido. A figura 4.15 mostra o resultado desta mesma técnica aplicada à função gaussiana.

Neste caso a ordem de precisão passou de 10^{-4} para 10^{-5} , o suficiente para a derivação via FFT superar o desempenho do primeiro método espectral em todos os pontos. No programa que gerou a figura 4.15, o primeiro método também foi testado ignorando apenas o ponto π , mas não houve alteração nos resultados, coincidindo com os asteriscos azuis.

Observação 4.2.1. Nesta técnica de ignorar alguns pontos do extremo do intervalo, os resultados mostrados são ignorando um e quatro pontos. No entanto, foram testadas outras quantidades de pontos, mas não houve melhora significativa. Por exemplo, considerando apenas o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a ordem de precisão ainda é a mesma que excluindo os quatro pontos dos extremos.

◇

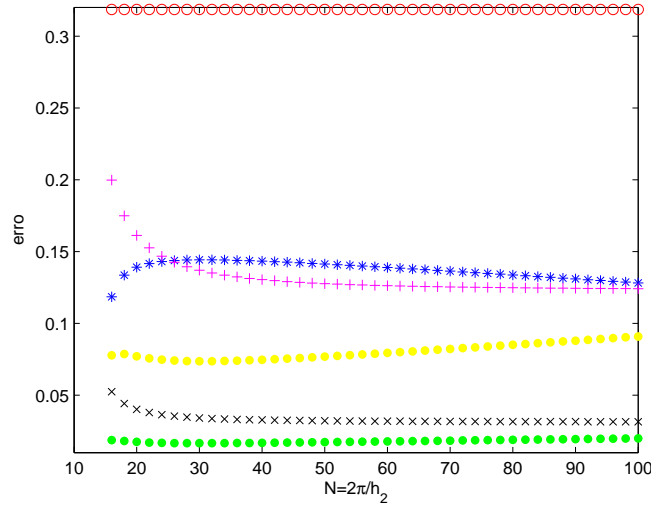


Figura 4.14: Primeiro e quarto métodos aplicados a S_h , para $h = 0.45$ e malha $h_2 = \frac{2\pi}{N}$. Respectivamente, azul (*) e vermelho (o) com todos os pontos de $h_2\mathbb{Z} \cap (-\pi, \pi]$; amarelo (·) e rosa (+) com os pontos em $[-\pi + h_2, \pi - h_2]$; verde (·) e preto (x) com os pontos em $[-\pi + 4h_2, \pi - 4h_2]$.

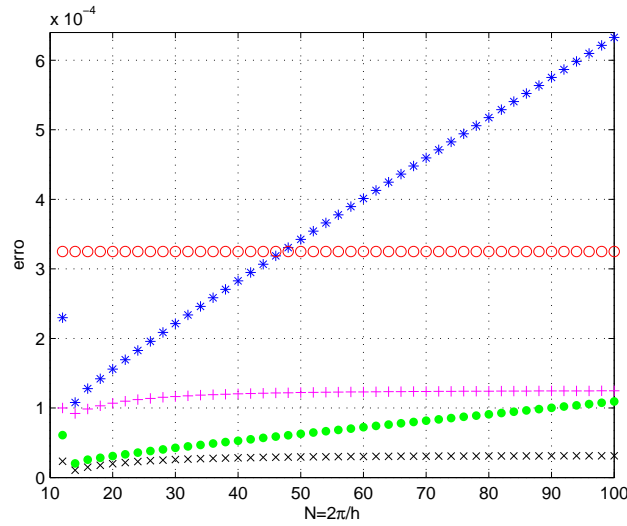


Figura 4.15: Aproximação da derivada da gaussiana. Em azul (*) e em vermelho (o) são os mesmos dados da figura 4.6. Em rosa (+) os resultados via FFT em $[-\pi + h_2, \pi - h_2]$. Em preto (x) via FFT e em verde (·) via primeiro método considerando o erro em $[-\pi + 4h_2, \pi - 4h_2]$.

As comparações feitas entre as funções sinc e as sinc periódicas podem ser feitas para suas derivadas. Qual é a diferença entre S'_h e S'_N no intervalo $[-\pi, \pi]$? A figura 4.16 foi feita para responder esta pergunta. Lembrando que a derivada da sinc periódica S_N é, pela equação (3.16),

$$S'_N(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\frac{\pi}{h}x)}{2 \tan(\frac{x}{2})} - \frac{\sin(\frac{\pi}{h}x)}{\frac{4\pi}{h} \sin^2(\frac{x}{2})}, & \text{se } x \in (-\pi, \pi) - \{0\} \\ 0, & \text{se } x = -\pi, 0, \pi. \end{cases} \quad (4.12)$$

Como comentado anteriormente, quando é feita a discretização de S_h na malha $h\mathbb{Z} \cap (-\pi, \pi]$, seu interpolador definido pelo terceiro método espectral é S_N . Neste caso, ao aplicar o terceiro método espectral à S_h , a função obtida no passo 3 é precisamente a derivada da sinc periódica S'_N .

Será que S'_N tende para S'_h , quando $h \rightarrow 0$, assim como S_N tende para S_h ? Para tentar responder, foi calculada a diferença máxima absoluta entre S'_h e S'_N no intervalo $[-\pi, \pi]$ através das fórmulas (4.9) e (4.12), respectivamente, para N par de 2 até 100, ou seja, para vários valores de $h = \frac{2\pi}{N}$, e com refinamento da malha $h_2 = \frac{h}{10}$. Os valores retornados foram todos o mesmo:

$$0.31830988618379. \quad (4.13)$$

Este valor já apareceu nos resultados quando foi verificado o fenômeno de Gibbs em (4.10). Mas o resultado não é constante para todo h , então por que o valor na expressão (4.13) insiste em aparecer? A resposta é que nestes programas foi usada a relação $h = \frac{2\pi}{N}$ com N par. Neste caso, o erro máximo é atingido em π , então tem-se

$$\begin{aligned} |S'_h(\pi) - S'_N(\pi)| &= \left| \frac{\frac{\pi^2}{h} \cos \frac{\pi^2}{h} - \sin \frac{\pi^2}{h}}{\frac{\pi^3}{h}} - 0 \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \left(\frac{\frac{\pi N}{2} \cos \frac{\pi N}{2} - \sin \frac{\pi N}{2}}{\frac{\pi N}{2}} \right) \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{\pi} \right| = \frac{1}{\pi} \approx 0.31830988618379. \end{aligned}$$

Isto mostra que $S'_N(x)$ não converge para $S'_h(x)$, quando $h \rightarrow 0$, como era de se esperar pelo comportamento da segunda coluna da figura 4.16.

Mas será que para os valores de h utilizados para atenuar o fenômeno de Gibbs a aproximação de S'_h por S'_N tem uma melhora significativa? Isto foi testado com o mesmo programa que gerou o resultado (4.13) com intervalo discretizado por $h_2 = \frac{\pi}{500}$ e os resultados estão listados na tabela 4.3.

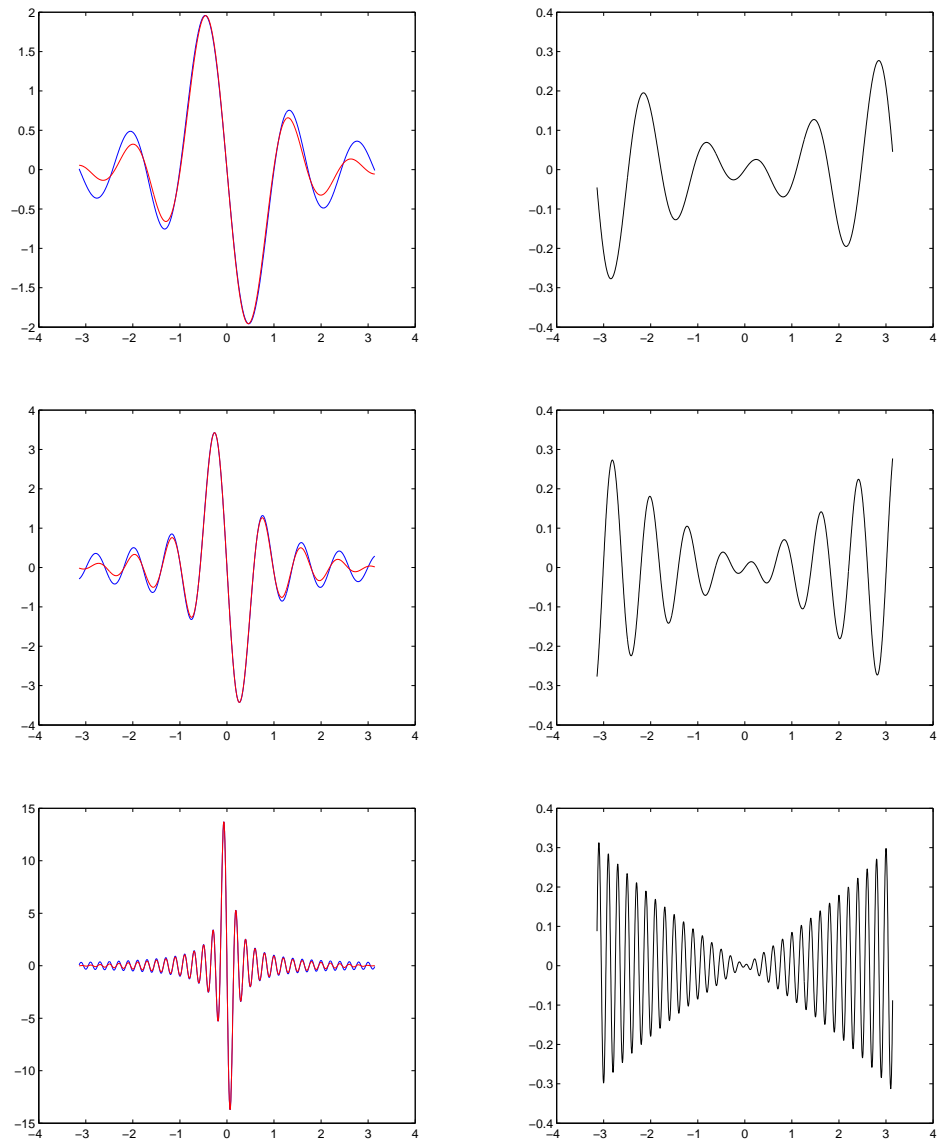


Figura 4.16: Coluna 1: S'_h em azul e S'_N em vermelho, para $h = 0.7$, $h = 0.4$ e $h = 0.1$. Coluna 2: diferença pontual das funções da coluna 1.

h	Erro Aproximado
0.015826	0.30458807454029
0.025856	0.31603966735809
0.032221	0.30538567040359
0.063469	0.31368449897428
0.064777	0.31351355818063
0.110245	0.30932509892123
0.216766	0.30330031895537
0.331065	0.29647404416197
0.419635	0.29151381839507
0.701654	0.27798010433986
0.905126	0.27018857266011
1.277577	0.25983795821002

Tabela 4.3: Diferença máxima absoluta entre S'_h e S'_N .

Desta vez não houve melhora nos resultados ao inserir mais dígitos na aproximação das raízes de $S'_h(\pi)$ em h . Por exemplo, a tabela 4.4 mostra o resultado desta tentativa para o primeiro valor de h da tabela 4.3.

h	Erro Aproximado
0.01582670394002	0.30230718676329

Tabela 4.4: Diferença máxima absoluta entre S'_h e S'_N .

Vê-se que a resposta à pergunta é negativa. Portanto, para aproximar a derivada da função sinc S_h pelos métodos espectrais apresentados, é melhor discretizá-la com $h_2 < h$.

Para finalizar, resta comparar os resultados obtidos até agora com a aplicação do quarto método spectral a uma função periódica, pois a gaussiana e a sinc não são periódicas na reta. Espera-se que os resultados sejam melhores, uma vez que o terceiro e o quarto métodos espectrais foram estabelecidos supondo justamente a periodicidade.

A figura 4.17 mostra este resultado para as funções sinc periódicas S_N , em comparação às funções exatas S'_N , para vários valores de $N = \frac{2\pi}{h}$ com refinamento $h_2 = 0.125h$. Como era esperado, a aproximação foi muito melhor do que das funções não periódicas: erros na ordem de 10^{-14} e 10^{-16} , sendo que o melhor resultado obtido anteriormente foi da ordem de 10^{-7} .

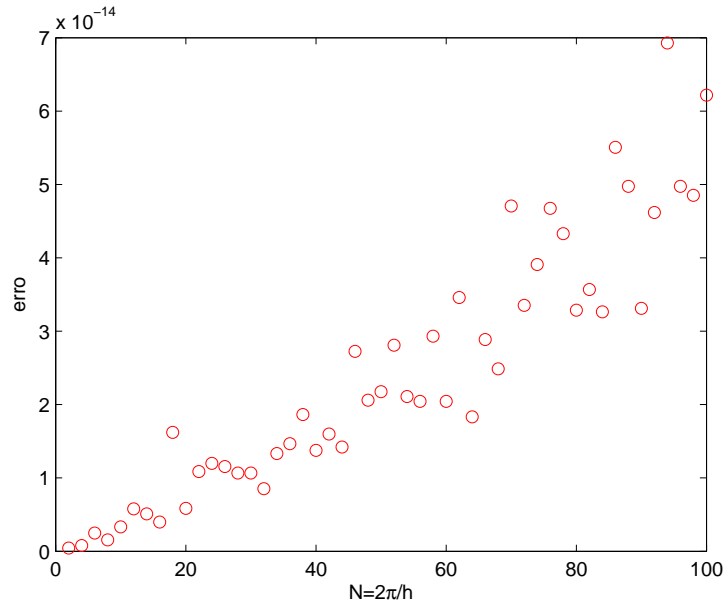


Figura 4.17: Quarto método espectral aplicado às sinc periódicas S_N .

4.3 Outras tentativas de atenuar o fenômeno de Gibbs

Foi levantada a hipótese de utilizar a técnica conhecida por *zero-padding* para tentar atenuar o fenômeno de Gibbs. O *zero-padding* é uma técnica de interpolação que consiste em acrescentar zeros no domínio das frequências (vide [19]). Isto pode ser feito no quarto método via FFT, acrescentando frequências mais altas zeradas antes de voltar para o domínio físico via IFFT (transformada rápida de Fourier inversa). Isto não é possível nos métodos que derivam no domínio físico, por isso serão apresentados apenas experimentos numéricos com o quarto método.

A figura 4.18 mostra o erro máximo absoluto para a função gaussiana com a utilização desta técnica. Vê-se que o resultado foi o mesmo obtido anteriormente sem *zero-padding* (figura 4.7). Na verdade, esta técnica faz uma interpolação sem interferir nos resultados dos pontos da malha original, portanto ela não atenua o fenômeno de Gibbs.

Outra tentativa de atenuar o fenômeno de Gibbs foi utilizar mais dados, além do intervalo $[-\pi, \pi]$. O interesse continua sendo aproximar a derivada

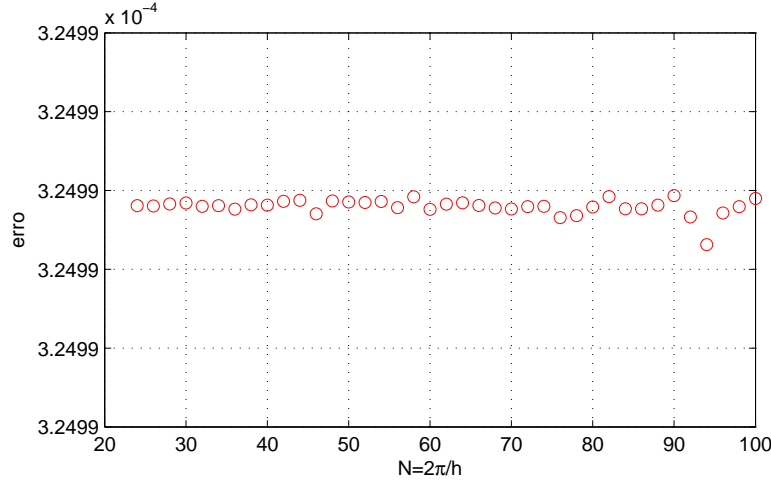


Figura 4.18: Quarto método com *zero-padding* aplicado à gaussiana.

da função em $[-\pi, \pi]$, porém, agora serão utilizados os valores da função original nos intervalos $(-2\pi, 2\pi]$, $(-3\pi, 3\pi]$, e assim por diante.

A figura 4.19 mostra os erros máximos absolutos em $[-\pi, \pi]$ para o primeiro e o quarto métodos, utilizando os dados de $(-2\pi, 2\pi]$ da função gaussiana. Vê-se que os resultados foram muito melhores do que os obtidos utilizando dados apenas no intervalo $(-\pi, \pi]$ (figura 4.6), passando da ordem de precisão de 10^{-4} para 10^{-15} .

Neste caso não houve diferença significativa ao utilizar mais dados da função gaussiana, a ordem de precisão 10^{-15} permanece para intervalos maiores.

Esta técnica foi testada também para a derivada das funções sinc S_h , para $h = \frac{2\pi}{N}$, com N par variando de 14 até 100, e refinamento da malha $h_2 = \frac{h}{10}$. A figura 4.20 mostra os erros máximos absolutos em $[-\pi, \pi]$ para o primeiro e o quarto métodos, utilizando os dados das sinc em $(-2\pi, 2\pi]$. Houve uma melhora da ordem de precisão de 10^{-1} para 10^{-4} (ou até 10^{-5} em alguns casos para o primeiro método).

Repetindo o experimento considerando os dados no intervalo $(-5\pi, 5\pi]$, gerou-se a figura 4.21. Agora a ordem de precisão foi de 10^{-5} e 10^{-6} .

Pode-se considerar intervalos ainda maiores, mas o custo computacional cresce consideravelmente e o ganho de precisão é cada vez menor. Por exemplo, para as mesmas funções sinc, para se chegar a uma precisão da ordem de 10^{-8} com o quarto método via FFT (o primeiro método se tornou muito lento com tantos dados) foi necessário considerar o intervalo $(-40\pi, 40\pi]$.

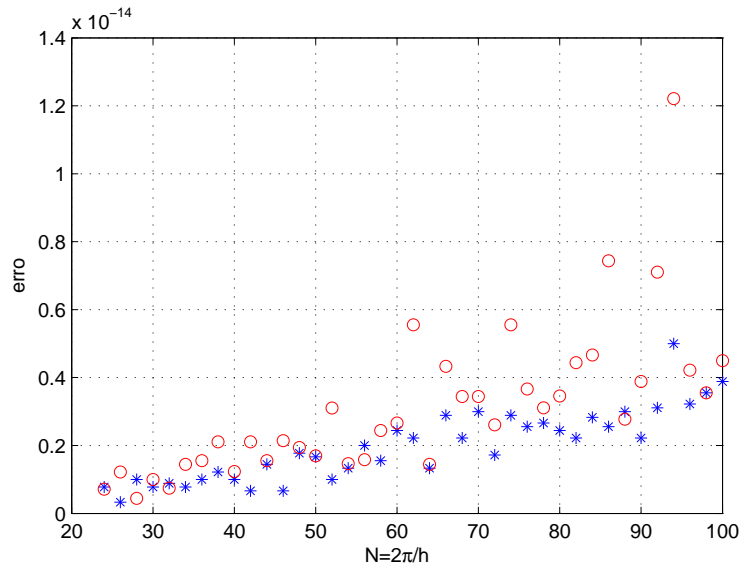


Figura 4.19: Erros em $[-\pi, \pi]$ ao aproximar a derivada da gaussiana usando seus valores em $(-2\pi, 2\pi]$. Em azul (*) o primeiro método e em vermelho (o) o quarto método.

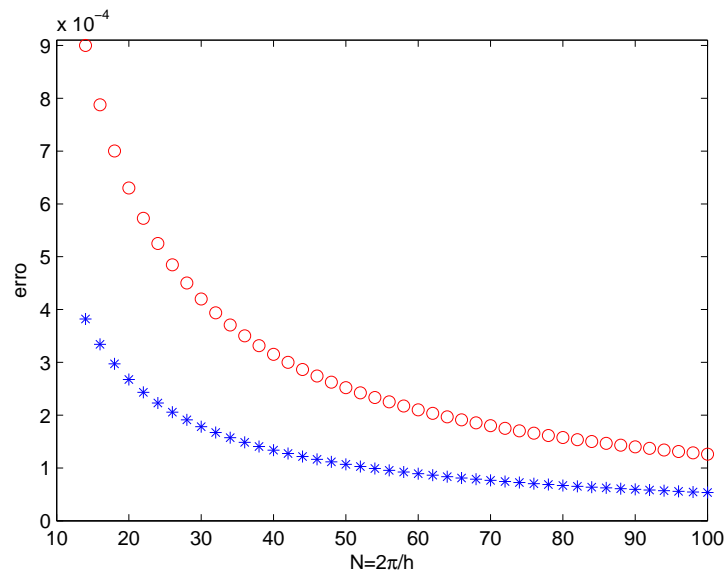


Figura 4.20: Erros em $[-\pi, \pi]$ ao aproximar S'_h usando os valores de $(-2\pi, 2\pi]$. Primeiro método em azul (*) e o quarto em vermelho (o).

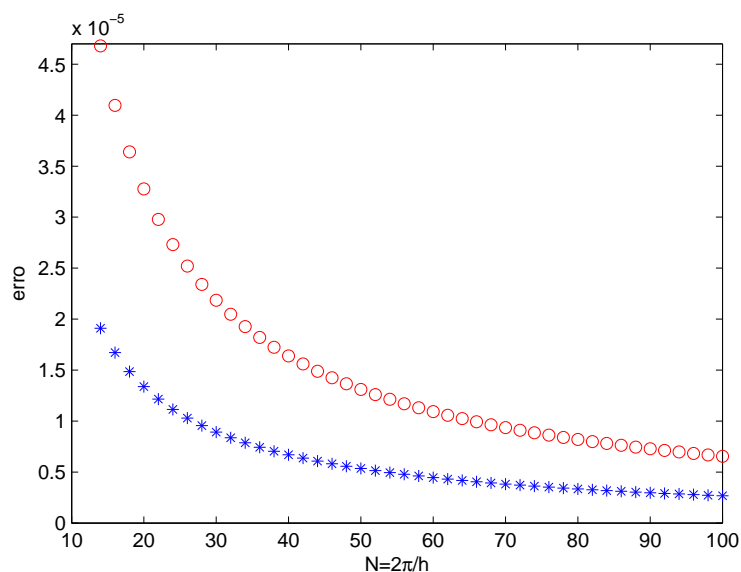


Figura 4.21: Erros em $[-\pi, \pi]$ ao aproximar S'_h usando os valores de $(-5\pi, 5\pi]$. Primeiro método em azul (*) e o quarto em vermelho (o).

A limitação desta técnica é que nem sempre esses dados extras são conhecidos, mas ela mostrou-se bastante eficaz. Ao utilizar mais dados da função, digamos no intervalo $(-2\pi, 2\pi]$, a extensão periódica da função se torna de período 4π , portanto as maiores oscilações do fenômeno de Gibbs não estão no intervalo $[\pi, \pi]$. Além disso, a descontinuidade das derivadas das funções estudadas se torna menor, uma vez que elas se aproximam de zero quando $|x| \rightarrow \infty$.

Capítulo 5

Conclusão

O livro *Spectral Methods in MATLAB*, de Lloyd Trefethen [12], principal referência deste trabalho, apresenta os mesmos métodos espectrais de derivação trabalhados aqui. Os diferenciais propostos são: a organização da teoria para fundamentar os métodos espectrais de derivação no capítulo 2; a forma de apresentação dos métodos e o detalhamento dos cálculos, com especial destaque à demonstração das equivalências entre os métodos, no capítulo 3; os experimentos com funções não periódicas no capítulo 4.

A página 36 de [12] mostra o resultado do terceiro método spectral, através da multiplicação pela matriz (3.22), para quatro funções, uma para cada item do teorema 3.1.8. Este teorema está no contexto do primeiro método spectral (para funções não periódicas) enquanto que as funções propostas são periódicas, ou seja, o teorema não se aplica a elas. Apesar disso, como o primeiro método não pode ser implementado sem truncamento (utiliza uma quantidade infinita de dados), o autor usa estes resultados para comparar a precisão do terceiro método spectral com a precisão prevista para o primeiro método no teorema 3.1.8. Porém, este é o caso mais simples, são funções 2π -periódicas e de classe C^1 (na verdade, mais suaves do que isso), então não manifestam o fenômeno de Gibbs. Em resumo, são funções em que as limitações dos métodos não aparecem.

Neste trabalho, pelo contrário, os testes foram realizados para funções não periódicas, a gaussiana e a sinc, truncadas no intervalo $[-\pi, \pi]$. Mesmo assim, os resultados mostram que é melhor usar o terceiro ou quarto métodos, propostos para funções periódicas, do que truncar os somatórios obtidos pelos primeiro e segundo métodos, propostos para funções não periódicas. Apenas quando o fenômeno de Gibbs se manifestou com maior intensidade em algumas funções sinc, o resultado foi melhor para o primeiro método. Porém, este método perde muito desempenho quando a malha é mais fina,

acumulando erros nos extremos do intervalo.

O quarto método aplicado à gaussiana, que tem decaimento rápido, teve ordem de precisão de 10^{-4} (ou 10^{-5} , quando ignorados alguns pontos próximos aos extremos do intervalo). Para a sinc, que tem decaimento mais lento, da ordem de $|x|^{-1}$ quando $|x| \rightarrow \infty$, os resultados foram bem piores: na ordem de 10^{-1} (ou 10^{-2} , quando ignorados alguns pontos próximos aos extremos do intervalo). O resultado foi melhorado apenas para algumas funções sinc bem selecionadas: aquelas que estendidas periodicamente mantêm a diferenciabilidade nos extremos do intervalo $[-\pi, \pi]$. Neste caso, os resultados foram da ordem de 10^{-5} a 10^{-7} .

Também foi aplicado o quarto método às funções sinc periódicas, com resultados na ordem de 10^{-14} a 10^{-16} .

Foram consideradas ainda duas tentativas de atenuar o fenômeno de Gibbs: a primeira por zero padding, que não alterou os valores dos erros; e na segunda foi aumentado o domínio onde a função é amostrada, e o erro foi calculado restringindo depois ao intervalo $[-\pi, \pi]$. Esta última se mostrou eficaz, mas só pode ser feita quando a função em questão é conhecida. Para a gaussiana, considerando o domínio $(-2\pi, 2\pi]$ os erros foram da ordem de 10^{-15} . Para a sinc, com domínio $(-2\pi, 2\pi]$ os erros foram da ordem de 10^{-4} e com domínio $(-5\pi, 5\pi]$ os erros foram da ordem de 10^{-5} e 10^{-6} .

Os métodos espectrais de derivação são utilizados em geral na resolução numérica de equações diferenciais ordinárias e parciais. O presente trabalho contribui com a formação de uma base no tema e fornece exemplos que ilustram situações complicadas que ajudam a diagnosticar e resolver problemas ou dificuldades diante de possíveis resultados insatisfatórios na resolução de uma equação diferencial.

Apêndice A

Códigos: Figuras do Capítulo 3

Figura 3.1, linha 1, coluna 1.

```
x=-5:0.01:5; y=exp(-x.^2); plot(x,y,'b-', 'linewidth',2)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Gaussiana no Domínio físico contínuo')
```

Figura 3.1, linha 1, coluna 2.

```
h=0.5; k=-pi/h-1:0.01:pi/h+1; y=sqrt(pi)*exp(-0.25*k.^2);
plot(k,y,'b-', 'linewidth',2)
%Construção dos eixos:
A=[min(k)-0.5 max(k)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Transformada da Gaussiana no Domínio contínuo das
Frequências')
```

Figura 3.1, linha 2, coluna 1.

```
h=0.5; x=-5:h:5; y=exp(-x.^2); plot(x,y,'b.', 'markersize',10)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Gaussiana no Domínio físico semidiscreta')
```

Figura 3.1, linha 2, coluna 2.

```

h=0.5; k=-pi/h:0.01:pi/h; n=length(k); m=10;
for p=1:n
    y=0;
    for j=-m:1:-1
        y=y+sqrt(pi)*(exp(-0.25*(k(p)+(2*pi*j)/h)^2)
                    +exp(-0.25*(k(p)-(2*pi*j)/h)^2));
    end
    w(p)=y+sqrt(pi)*exp(-0.25*(k(p))^2);
end, plot(k,w,'b-','linewidth',2);
%Construção dos eixos:
A=[min(k)-1.5 max(k)+1.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(w)-0.5 max(w)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Gaussiana no Domínio limitado das Frequências')

```

Figura 3.1, linha 3, coluna 1.

```

h=0.5; x=-5:h:5; n=length(x); s=0.01; xr=-5:s:5; m=length(xr);
for l=1:m
    aux=0;
    for j=1:n
        if x(j)==xr(l)
            Sj=exp(-(x(j))^2); aux=aux+Sj;
        else
            vj=exp(-(x(j))^2);
            Sj=(sin((pi/h)*(xr(l)-x(j))))/((pi/h)*(xr(l)-x(j)));
            aux=aux+vj*Sj;
        end
    end
    p(l)=aux;
end, plot(xr,p,'b-','linewidth',2)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(p)-0.5 max(p)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Interpolador da Gaussiana no Domínio físico')

```

Figura 3.1, linha 3, coluna 2.

```

h=0.5; k=-pi/h:0.01:pi/h; n=length(k); m=10;
for p=1:n
    y=0;

```

```

for j=-m:1:-1
    y=y+sqrt(pi)*(exp(-0.25*(k(p)+(2*pi*j)/h)^2)
                +exp(-0.25*(k(p)-(2*pi*j)/h)^2));
end
w(p)=y+sqrt(pi)*exp(-0.25*(k(p))^2);
end, plot(k,w,'b-','linewidth',2);
%Extensão à esquerda
x=-pi/h-1.5:0.01:-pi/h; y=zeros(1,length(x))*0.01;
hold on, plot(x,y,'r-','linewidth',3);
%Extensão à direita
z=pi/h:0.01:pi/h+1.5; u=zeros(1,length(z))*0.01;
hold on, plot(z,u,'r-','linewidth',3);
%Construção dos eixos:
A=[min(k)-1.5 max(k)+1.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(w)-0.5 max(w)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Interpolador da Gaussiana no Domínio das Frequências')

```

Figura 3.1, linha 4, coluna 1.

```

h=0.5; x=-5:h:5; n=length(x); s=0.01; xr=-5:s:5; m=length(xr);
for l=1:m
    aux=0;
    for j=1:n
        if x(j)~=xr(l)
            vj=exp(-(x(j))^2);
            Sj=(cos((pi/h)*(xr(l)-x(j)))-(sin((pi/h)*(xr(l)-x(j))))
                /((pi/h)*(xr(l)-x(j))))/(xr(l)-x(j));
            aux=aux+vj*Sj;
        end
    end
    p(l)=aux;
end, plot(xr,p,'b-','linewidth',2)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(p)-0.5 max(p)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Derivada do Interpolador da Gaussiana no Domínio
físico')

```

Figura 3.1, linha 4, coluna 2.

```

h=0.5; k=-pi/h:0.01:pi/h; n=length(k); m=10; l=1;

```

```

for p=1:n
    y=0;
    for j=-m:1:m
        y=y+sqrt(pi)*exp(-0.25*(k(p)+(2*pi*j)/h)^2);
    end
    w(l)=k(p)*y; l=l+1;
end, plot(k,w,'b-','linewidth',2);
%Extensão à esquerda
x=-pi/h-1.5:0.01:-pi/h; y=zeros(1,length(x))*0.01;
hold on, plot(x,y,'r-','linewidth',3);
%Extensão à direita
z=pi/h:0.01:pi/h+1.5; u=zeros(1,length(z))*0.01;
hold on, plot(z,u,'r-','linewidth',3);
%Construção dos eixos:
A=[min(k)-1.5 max(k)+1.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(w)-0.5 max(w)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Derivada do Interpolador da Gaussiana no Domínio das
Frequências (parte imaginária)')

```

Figura 3.2, linha 1, coluna 1.

```

for x=-5:0.5:5
    if x~=0
        y=0; plot(x,y,'.','markersize',15)
    else
        y=1; plot(x,y,'.','markersize',15)
    end
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
end, title('Delta no Domínio físico')

```

Figura 3.2, linha 1, coluna 2.

```

h=0.5; x=-pi/h:0.01:pi/h; y=ones(1,length(x))*h;
plot(x, y,'linewidth',2)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-1.5 max(x)+1.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Delta no Domínio das frequências')

```

Figura 3.2, linha 2, coluna 1.

```
h=0.5; x=-5:0.01:5; n=length(x);
for j=1:n
    if x(j)~=0
        y(j)=(sin(pi/h*x(j)))/(pi/h*x(j));
    else
        y(j)=1;
    end
end, plot(x,y,'b-','linewidth',2)
%Construção dos eixos
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Interpolador da Delta: Função Sinc')
```

Figura 3.2, linha 2, coluna 2.

```
h=0.5; x=-pi/h:0.01:pi/h; y=ones(1,length(x))*h;
plot(x,y,'b-','linewidth',2)
%Extensão à esquerda:
v=-pi/h-1.5:0.01:-pi/h; w=zeros(1,length(v))*0.01;
hold on, plot(v,w,'r-','linewidth',3)
%Extensão à direita:
z=pi/h:0.01:pi/h+1.5; u=zeros(1,length(z))*0.01;
hold on, plot(z,u,'r-','linewidth',3);
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-1.5 max(x)+1.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Interpolador da Delta no domínio das frequências')
```

Figura 3.2, linha 3, coluna 1.

```
h=0.5; x=-5:0.01:5; n=length(x);
for l=1:n
    if x(l)==0
        p(l)=0;
    else
        p(l)=(cos(x(l)*(pi/h))-((sin(x(l)*(pi/h)))
            /(x(l)*(pi/h))))/x(l);
    end
end, plot(x,p,'b-','linewidth',2)
```

```
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(p)-0.5 max(p)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Derivada da Sinc')
```

Figura 3.2, linha 3, coluna 2.

```
h=0.5; x=-pi/h:0.01:pi/h; y=ones(1,length(x))*h; p=x.*y;
plot(x,p,'b-', 'linewidth',2)
%Extensão à esquerda:
v=-pi/h-1.5:0.01:-pi/h; w=zeros(1,length(v))*0.01;
hold on, plot(v,w,'r-', 'linewidth',3);
%Extensão à direita:
z=pi/h:0.01:pi/h+1.5; u=zeros(1,length(z))*0.01;
hold on, plot(z,u,'r-', 'linewidth',3);
A=[min(x)-1.5 max(x)+1.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(p)-0.5 max(p)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Derivada do Interpolador da Delta no domínio das
frequências (parte imaginária)')
```

Figura 3.3, linha 1, coluna 1.

```
h=2*pi/14; x=h:h:2*pi; y=zeros(1,length(x)); y(length(x))=1;
plot(x,y,'b.', 'markersize',15)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-1.0 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-0.5 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Delta Periódica no Domínio físico')
```

Figura 3.3, linha 1, coluna 2.

```
h=2*pi/14; x=-pi/h+1:pi/h; y=ones(1,length(x))*h;
plot(x, y,'b.', 'markersize',15)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-5 max(x)+5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-1.0 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Delta Periódica no Domínio das frequências')
```

Figura 3.3, linha 2, coluna 1.


```

h=2*pi/14; x=0:0.01:2*pi; m=length(x); p(1)=1; p(m)=1;
for l=2:m-1
    p(l)=(sin((pi/h)*x(l)))/((2*pi/h)*tan(x(l)/2));
end, plot(x,p,'b-','linewidth',2)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(p)-0.5 max(p)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Interpolador da Delta Periódica: Sinc Periódica')

```

Figura 3.3, linha 2, coluna 2.

```

h=2*pi/14; x=-pi/h:pi/h; y=ones(1,length(x))*h; y(1)=h/2;
y(length(x))=h/2; plot(x, y, '.', 'markersize',15)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-5 max(x)+5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(y)-1.0 max(y)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Interpolador da Delta Periódica no Domínio das
frequências')

```

Figura 3.3, linha 3, coluna 1.

```

h=2*pi/14; x=0:0.01:2*pi; m=length(x); p(1)=0; p(m)=0;
for l=2:m-1
    p(l)=cos(x(l)*pi/h)/(2*tan(x(l)/2))-sin(x(l)*pi/h)
        /(4*pi/h*sin(x(l)/2)^2);
end, plot(x,p,'b-','linewidth',2)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-0.5 max(x)+0.5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(p)-0.5 max(p)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Derivada da Sinc Periódica')

```

Figura 3.3, linha 3, coluna 2.

```

h=2*pi/14; x=-pi/h:pi/h; n=length(x); y=ones(1,n)*h; p=x.*y;
p(1)=0; p(n)=0; plot(x, p, '.', 'markersize',15)
%Construção dos eixos:
A=[min(x)-5 max(x)+5]; B=[0 0]; hold on, plot(A, B,'k-')
C=[0 0]; D=[min(p)-0.5 max(p)+0.5]; hold on, plot(C, D,'k-')
title('Derivada da Delta Periódica no Domínio das frequências
(parte imaginária)')

```


Apêndice B

Programas do Capítulo 4

Programa da figura 4.2.

```
h=0.3;
%Via aliasing:
qa=exp(pi^2/h^2)*exp(-(2*[2:21]+1)*pi^2/h^2)
plot([1:20],qa,'b*'), hold on
%Via definição:
qb=exp(-(2*[2:21]+1)*h^2);
plot([1:20],qb,'ro')
xlabel('j'), ylabel('quociente')
```

Programa da figura 4.3.

```
for N=5:100; h=2*pi/N; k=-pi/h; y=0;
    for j=-20:1:-1
        y=y+sqrt(pi)*(exp(-0.25*(k+(2*pi*j)/h)^2)
            +exp(-0.25*(k-(2*pi*j)/h)^2));
    end, erro=abs(y);
    semilogy(N,erro,'b.', 'markersize',15), hold on
end, grid on, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro
```

Programa da figura 4.4.

```
for Nhalf=1:1:11; %Nhalf=10:1:30; Nhalf=30:1:50;
    h=pi/Nhalf; x=-Nhalf:1:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
    %Interpolador pelo primeiro método espectral:
    for j=1:n
```

```

aux=0;
for m=1:n
    vm=exp(-(x(m))^2);
    if x(m)==x(j)
        aux=aux+vm;
    else
        Sm=(sin((pi/h)*(x(j)-x(m))))/((pi/h)*(x(j)-x(m)));
        aux=aux+vm*Sm;
    end
end
p(j)=aux;
end
%Função exata:
u=exp(-x.^2);
%Interpolador pela FFT
fftu=fft(u); pu=ifft(fftu);
erro1=max(abs(p-u));
plot(2*Nhalf,erro1,'b*'), hold on
erro2=max(abs(pu-u));
plot(2*Nhalf,erro2,'ro'), hold on
end, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa da figura 4.5.

```

for Nhalf=1:1:50;
    h=pi/Nhalf; x=-Nhalf:1:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
    for j=1:n
        aux=0; aux2=0;
        for m=1:n
            vm=exp(-(x(m))^2);
            if x(m)==x(j)
                aux=aux+vm; aux2=aux2+vm;
            else
                Sm=(sin(pi/h*(x(j)-x(m))))/(2*pi/h*tan((x(j)-x(m))/2));
                Sm2=(sin(pi/h*(x(j)-x(m))))/(pi/h*(x(j)-x(m)));
                aux=aux+vm*Sm; aux2=aux2+vm*Sm2;
            end
        end
        p(j)=aux; p2(j)=aux2;
    end, u=exp(-x.^2); %função exata
    erro1=max(abs(p-u)); plot(2*Nhalf,erro1,'ko'), hold on

```

```

    erro2=max(abs(p2-u)); plot(2*Nhalf,erro2,'b*'), hold on
end, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa da figura 4.6.

```

for Nhalf=2:6; %Nhalf=6:12; Nhalf=10:30; Nhalf=30:50;
h=pi/Nhalf; x=-Nhalf+1:1:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
for l=1:n
    aux=0;
    for j=1:n
        if x(j)~=x(1)
            vj=exp(-(x(j))^2); Sj=(-1)^(l-j)/((l-j)*h); aux=aux+vj*Sj;
        end
    end
    w(l)=aux;
end
du=-2*x.*exp(-x.^2); u=exp(-(x).*(x)); fftu=fft(u);
dfftu=i*[0:n/2-1 0 -n/2+1:-1].*fftu; deru=ifft(dfftu);
erro1=max(abs(du-w)); plot(2*Nhalf,erro1,'b*'), hold on
erro2=max(abs(du-deru)); plot(2*Nhalf,erro2,'ro'), hold on
end, grid on, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa da figura 4.7.

```

for Nhalf=2:1:6; %Nhalf=6:1:50;
h=pi/Nhalf; x=-Nhalf+1:1:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
for l=1:n
    aux=0;
    for j=1:n
        vj=exp(-(x(j))^2);
        if x(j)~=x(1)
            Sj=(-1)^(l-j)/2*cot((l-j)*h/2); aux=aux+vj*Sj;
        end
    end
    w(l)=aux;
end, du=-2*x.*exp(-x.^2); %derivada exata.
u=exp(-(x).*(x)); fftu=fft(u);
dfftu=i*[0:n/2-1 0 -n/2+1:-1].*fftu; deru=ifft(dfftu);
erro1=max(abs(du-w)); plot(2*Nhalf,erro1,'b*'), hold on
erro2=max(abs(du-deru)); plot(2*Nhalf,erro2,'ro'), hold on
end, grid on, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Definição do comando *sincp* para sinc periódica.

```
function sincp = sincp(x,h)
%x varia no intervalo [-pi,pi] e 0<h<2;
for j=1:length(x)
    if x(j)~=0
        aux=(sin(pi*x(j)/h))./(2*pi./h.*tan(x(j)/2));
    else
        aux=1;
    end
    sincp(j)=aux;
end
```

Programa da figura 4.8.

```
h=0.7; %h=0.4; %h=0.1;
Nhalf=1000; h2=pi/Nhalf; x=-Nhalf:1:Nhalf; x=h2*x; n=length(x);
f=sinc(x/h); p=sincp(x,h); plot(x,f,'b-'), hold on
plot(x,p,'r-'), figure, plot(x,f-p,'k-')
```

Programa da figura 4.9.

```
for Nhalf=2.^(0:13);
    h=pi/Nhalf; ref=0.1; x=-Nhalf+ref:ref:Nhalf; x=h*x;
    f=sinc(x/h); g=sincp(x,h); erro=max(abs(f-g));
    loglog(2*Nhalf,erro,'b*'), hold on
end, grid on, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro
```

Programa da figura 4.10.

```
for Nhalf=1:50;
    h=pi/Nhalf; ref=0.1; h2=h/10;
    x=-Nhalf+ref:ref:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
    for j=1:n %Aproximação da sinc pelo interpolador
        aux=0;
        for m=1:n
            vm=sinc(x(m)/h);
            if x(m)==x(j)
                aux=aux+vm;
            else
```

```

        Sm=(sin((pi/h2)*(x(j)-x(m))))/((pi/h2)*(x(j)-x(m)));
        aux=aux+vm*Sm;
    end
end
p(j)=aux;
end %Aproximação da sinc via FFT:
f=sinc(x/h); fftf=fft(f); p2=ifft(fftf);
erro=max(abs(f-p)) plot(2*Nhalf,erro,'b*'), hold on
erro2=max(abs(f-p2)); plot(2*Nhalf,erro2,'ro'), hold on
end, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa que gerou os dados (4.10) e (4.11).

```

for Nhalf=1:1:50;
    h=pi/Nhalf; ref=0.1; h2=h/10; x=-Nhalf+ref:ref:Nhalf; x=h*x;
    n=length(x); %Derivada teórica da sinc:
    for j=1:n
        if x(j)~=0
            df(j)=(cos(Nhalf*x(j))-(sin(Nhalf*x(j))/(Nhalf*x(j))))/x(j);
        else
            df(j)=0;
        end
    end
    end %Derivada via primeiro método:
    for l=1:n
        aux=0;
        for j=1:n
            if x(j)~=x(l)
                vj=sinc(x(j)/h); Sj=(-1)^(l-j)/((l-j)*h2); aux=aux+vj*Sj;
            end
        end
        w(l)=aux;
    end
    end %Derivada via FFT:
    f=sinc(x/h); fftf=fft(f);
    dfftf=i*[0:n/2-1 0 -n/2 + 1:-1].*fftf; df2=ifft(dfftf);
    erro=max(abs(df-w)), erro2=max(abs(df-df2))
end, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa das figuras 4.11 e 4.12.

```

h=0.45; Nhalf=12; %Nhalf=50; %Nhalf=150;

```

```

h2=pi/Nhalf; x=-Nhalf+1:1:Nhalf; x=h2*x; n=length(x);
%Derivada teórica da sinc:
for j=1:n
    if x(j)~=0
        df(j)=(cos((pi/h)*x(j))-(sinc(x(j)/h)))/x(j);
    else
        df(j)=0;
    end
end
%Derivada via FFT:
f=sinc(x/h); fftf=fft(f);
dfftf=i*[0:n/2-1 0 -n/2 + 1:-1].*fftf; df2=ifft(dfftf);
diferenca=df-df2; erro=max(abs(df-df2));
plot(x,diferenca,'b-'), grid on
figure, plot(x,df2,'r-'), hold on, plot(x,df,'b-'), grid on

```

Programa da figura 4.13.

```

h=-2:0.005:2;
f=((pi.^2./h).*cos(pi.^2./h)-sin(pi.^2./h))./(pi^3./h);
plot(h,f,'-'), xlabel h

```

Programa da figura 4.14.

```

h=0.45;
for Nhalf=7:50;
    h2=pi/Nhalf; x=-Nhalf+1:1:Nhalf; x=h2*x; n=length(x);
    for j=1:n
        if x(j)~=0
            df(j)=(cos((pi/h)*x(j))-(sinc(x(j)/h)))/x(j);
        else
            df(j)=0;
        end
    end
    f=sinc(x/h); fftf=fft(f);
    dfftf=i*[0:n/2-1 0 -n/2 + 1:-1].*fftf; df2=ifft(dfftf);
    erro=max(abs(df-df2)); ERRO=df-df2;
    plot(2*Nhalf,erro,'ro'), hold on
    plot(2*Nhalf,max(abs(ERRO(1:n-1))), 'm+')
    plot(2*Nhalf,max(abs(ERRO(5:n-5))), 'kx')
end, xlabel N=2\pi/h_2, ylabel erro

```


Programa da figura 4.15.

```

h=0.45;
for Nhalf=8:50;
    h2=pi/Nhalf; x=-Nhalf+1:1:Nhalf; x=h2*x; n=length(x);
    %Derivada teórica da sinc:
    for j=1:n
        if x(j)~=0
            df(j)=(cos((pi/h)*x(j))-(sinc(x(j)/h)))/x(j);
        else
            df(j)=0;
        end
    end %Derivada via primeiro método:
    for l=1:n
        aux=0;
        for j=1:n
            if x(j)~=x(1)
                vj=sinc(x(j)/h); Sj=(-1)^(l-j)/((l-j)*h2); aux=aux+vj*Sj;
            end
        end
        w(l)=aux;
    end %Derivada via FFT:
    f=sinc(x/h); fftf=fft(f);
    dfftf=i*[0:n/2-1 0 -n/2 + 1:-1].*fftf; df2=ifft(dfftf);
    erro=max(abs(df-w)); ERRO=df-w;
    plot(2*Nhalf,erro,'b*'), hold on
    plot(2*Nhalf,max(abs(ERRO(1:n-1))), 'y.', 'markersize',15)
    plot(2*Nhalf,max(abs(ERRO(5:n-5))), 'g.', 'markersize',15)
    erro2=max(abs(df-df2)); ERRO2=df-df2;
    plot(2*Nhalf,erro2,'ro'), hold on
    plot(2*Nhalf,max(abs(ERRO2(1:n-1))), 'm+')
    plot(2*Nhalf,max(abs(ERRO2(5:n-5))), 'kx')
end, xlabel N=2\pi/h_2, ylabel erro

```

Programa da figura 4.16.

```

h=0.7; %h=0.4; %h=0.1;
Nhalf=1000; h2=pi/Nhalf; x=-Nhalf:1:Nhalf; x=h2*x; n=length(x);
for j=1:n
    if x(j)~=0
        df(j)=(cos(pi/h*x(j))-(sin(pi/h*x(j))/(pi/h*x(j))))/x(j);
    end
end

```

```

df2(j)=(cos(pi/h*x(j)))/(2*tan(x(j)/2))
        -(sin(pi/h*x(j)))/(4*pi/h*(sin(x(j)/2))^2);
else
    df(j)=0; df2(j)=0;
end
end
plot(x,df,'b-'), hold on, plot(x,df2,'r-')
figure, plot(x,df-df2,'k-')

```

Programa do resultado (4.13).

```

for Nhalf=1:1:50;
h=pi/Nhalf; ref=0.1; x=-Nhalf:ref:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
for j=1:n
    if x(j)~=0
        df(j)=(cos(Nhalf*x(j))-(sin(Nhalf*x(j))/(Nhalf*x(j))))/x(j);
        df2(j)=(cos(Nhalf*x(j)))/(2*tan(x(j)/2))
                -(sin(Nhalf*x(j)))/(4*Nhalf*(sin(x(j)/2))^2);
    else
        df(j)=0; df2(j)=0;
    end
end
erro=max(abs(df-df2)); plot(2*Nhalf,erro,'b*'), hold on
end, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa da figura 4.17.

```

for Nhalf=1:1:50;
h=pi/Nhalf; ref=0.125; h2=h/10;
x=-Nhalf+ref:ref:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
%Derivada teórica da sinc periodica:
for j=1:n
    if x(j)~=0
        df(j)=cos(Nhalf*x(j))/(2*tan(x(j)/2))
                -sin(Nhalf*x(j))/(4*Nhalf*(sin(x(j)/2))^2);
    else
        df(j)=0;
    end
end
end %Derivada via FFT:
f=sincp(x,h); fftf=fft(f);

```

```

dfdtf=i*[0:n/2-1 0 -n/2 + 1:-1].*fftf; df2=ifft(dfdtf);
erro=max(abs(df-df2)), plot(2*Nhalf,erro,'ro'), hold on
end, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa da figura 4.18.

```

for Nhalf=12:1:50;
h=pi/Nhalf; x=-Nhalf+1:1:Nhalf; x=h*x; n=length(x);
y=-2*Nhalf+2:1:2*Nhalf; y=h/2*y;
u=exp(-(x).*(x)); fftu=fft(u);
dfdtf=(pi+n/2*h)/pi*i*[0:n/2-1 0 -n/2+1:-1].*fftu;
duzeros=[dfdtf(1:n/2) zeros(1,n) dfdtf(n/2+1:n)];
deru=ifft(duzeros); du=-2*y.*exp(-y.^2);
erro2=max(abs(du-deru(1:length(deru)-1)));
plot(2*Nhalf,erro2,'ro'), hold on
end, grid on, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa da figura 4.19.

```

for Nhalf=12:1:50;
h=pi/Nhalf; a=2; x=-a*Nhalf+1:1:a*Nhalf; x=h*x; n=length(x);
for l=1:n
aux=0;
for j=1:n
if x(j)==x(1)
else
vj = exp(-(x(j))^2); Sj=(-1)^(l-j)/((l-j)*h);
aux=aux+vj*Sj;
end
end
w(l)=aux;
end
u=exp(-(x).*(x)); fftu=fft(u);
dfdtf=1/a*i*[0:n/2-1 0 -n/2+1:-1].*fftu;
deru=ifft(dfdtf); du=-2*x.*exp(-x.^2); dif1=du-w;
erro1=max(abs(dif1((a-1)*Nhalf:(a+1)*Nhalf)));
plot(2*Nhalf,erro1,'b*'), hold on, dif2=du-deru;
erro2=max(abs(dif2((a-1)*Nhalf:(a+1)*Nhalf)));
plot(2*Nhalf,erro2,'ro')
end, grid on, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Programa das figuras 4.20 e 4.21.

```

for Nhalf=7:1:50;
    h=pi/Nhalf; ref=0.1; h2=h/10; a=2; %a=5;
    x=-a*Nhalf+ref:ref:a*Nhalf; x=h*x; n=length(x);
    %Derivada teórica da sinc:
    for j=1:n
        if x(j)~=0
            df(j)=(cos(Nhalf*x(j))-(sin(Nhalf*x(j))
                /(Nhalf*x(j))))/x(j);
        else
            df(j)=0;
        end
    end
    %Derivada via primeiro método:
    for l=1:n
        aux=0;
        for j=1:n
            if x(j)~=x(1)
                vj=sinc(x(j)/h); Sj=(-1)^(l-j)/((l-j)*h2); aux=aux+vj*Sj;
            end
        end
        w(l)=aux;
    end
    %Derivada via FFT:
    f=sinc(x/h); fftf=fft(f);
    dfftf=1/a*i*[0:n/2-1 0 -n/2 + 1:-1].*fftf;
    df2=ifft(dfftf); dif1=df-w;
    erro1=max(abs(dif1((a-1)*10*Nhalf:(a+1)*10*Nhalf)));
    plot(2*Nhalf,erro1,'b*'), hold on, dif2=df-df2;
    erro2=max(abs(dif2((a-1)*10*Nhalf:(a+1)*10*Nhalf)));
    plot(2*Nhalf,erro2,'ro')
end, xlabel N=2\pi/h, ylabel erro

```

Referências

- [1] A. N. Kolmogorov e S. V. Fomin: *Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional*. 3ª edição, Editora Mir, 1978.
- [2] Alexander D. Poularikas: *Transforms and Applications*. 3ª edição, CRC Press, 2010.
- [3] Adán J. Corcho Fernandez e Marcos Petrúcio de A. Cavalcante: *Introdução à Análise Harmônica e Aplicações*. IMPA, Publicações Matemáticas, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2009.
- [4] Carlos Isnard: *Introdução à Medida e Integração*. IMPA, Projeto Euclides, 2007.
- [5] David Gottlieb e Chi-Wang Shu: *On the Gibbs Phenomenon and its Resolution*. SIAM Review, Vol. 39, No. 4, pp. 644-668, December 1997.
- [6] Djairo Guedes de Figueiredo: *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 4ª edição, 3ª impressão. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro: 2005.
- [7] Elon L. Lima: *Curso de Análise, Volume 1*. 12ª edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro: 2008.
- [8] Erwin Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library Edition Published 1989, reprint: 2007.
- [9] Gilbert G. Walter: *Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications*. CRC Press, 1994.
- [10] Gilbert Strang: *Introduction to Applied Mathematics*. 1ª edição. Wellesley - Cambridge Press, 1986.
- [11] Lars Hörmander: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Volume 1. Springer-Verlag, segunda edição, 1990.

- [12] Lloyd N. Trefethen: *Spectral Methods in Matlab*. 1ª edição. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [13] Lloyd N. Trefethen: *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Não publicado, disponível em <http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdetext.html>. Cornell University, 1996.
- [14] Peter Henrici: *Applied and Computational Complex Analysis*. Volume 1, Wiley-Interscience publication, 1974.
- [15] Peter Henrici: *Applied and Computational Complex Analysis*. Volume 2, Wiley-Interscience publication, 1977.
- [16] Rafael Iório Júnior e Valéria de M. Iório: *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*. 2ª edição. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2010.
- [17] Rafael Iório Júnior e Valéria de M. Iório: *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. 1ª edição. Cambridge University Press, 2001.
- [18] Raymond C. Paley e Norbert Wiener: *Fourier Transforms in the Complex Domain*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 19, 1934.
- [19] Rick Lyons: *How to Interpolate in the Time Domain by Zero Padding in the Frequency Domain*. www.dspguru.com/dsp/howtos/how-to-interpolate-in-time-domain-by-zero-padding-in-frequency-domain
- [20] Saulo Pomponet Oliveira, Ailín Ruiz de Zárate Fábregas, A. C. da Rocha e Daniel Gregorio Alfaro Vigo: *A note on the alternate trapezoidal quadrature method for Fredholm integral eigenvalue*. Numerical Algorithms, 62, 601-614, 2013.
- [21] Pablo Nestor Gonzáles Cordóva: *Análise de Estabilidade de Métodos Numéricos para Modelos Lineares de Ondas Internas*. Dissertação de Mestrado, UFPR, 2011.
- [22] Yitzhak Katznelson: *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press Mathematical Library, Third corrected edition, 2004.